مسئله‌ی ۱: ماشین عجیب ..... ۲۰ امتیاز

سعید دارای ماشین عجیبی است که دارای ۱۰۰۰ خانه حافظه می‌باشد. به هر خانه حافظه یک بیت گفته می‌شود و بیت iام را با $M[i]$ نشان می‌دهیم. هر بیت حافظه یکی از دو مقدار ۰ و ۱ را در خود ذخیره می‌کند. متاسفانه مقادیر ذخیره شده در حافظه ماشین قابل رویت نیست. تنها می‌دانیم اعداد ذخیره شده در بیت‌های ۸۰۱ تا ۹۰۰ برابر ۰ و اعداد ذخیره شده در بیت‌های ۹۰۱ تا ۱۰۰۰ برابر ۱ هستند.
این ماشین عجیب تنها توانایی اجرای دستورات زیر را دارد:

- $M[i] = M[i_۱] \wedge M[i_۲] \cdots \wedge M[i_k]$: با اجرای این دستور در صورتی که اعداد ذخیره شده در بیت‌های $i_۱$ام، $i_۲$ام و $\cdots$ و i_kام برابر ۱ باشند مقدار $M[i]$ یک و در غیر این صورت صفر خواهد شد.
- $M[i] = M[i_۱] \vee M[i_۲] \cdots \vee M[i_k]$: با اجرای این دستور در صورتی که اعداد ذخیره شده در بیت‌های $i_۱$ام، $i_۲$ام و $\cdots$ و i_kام برابر ۰ باشند مقدار $M[i]$ صفر و در غیر این صورت یک خواهد شد.
- $M[i] = M[i_۱] \oplus M[i_۲] \cdots \oplus M[i_k]$: با اجرای این دستور در صورتی که تعداد یک‌های ذخیره شده در بیت‌های $i_۱$ام، $i_۲$ام و $\cdots$ و i_kام فرد باشد مقدار $M[i]$ یک و در غیر این صورت صفر خواهد شد.

در واقع این سه دستور به ترتیب and، or و xor منطقی می‌باشند. بدیهی است که بلافاصله بعد از این که سعید به دستگاه دستور می‌دهد، دستگاه دستور را اجرا می‌کند. توجه کنید اندیس‌های $i, i_۱, \cdots, i_k$ حداقل ۱ و حداکثر ۱۰۰۰ می‌باشند و k نیز حداقل ۱ و حداکثر ۱۰۰۰ می‌باشد.
در کنار دستورات فوق، این ماشین عجیب به سوال زیر هم پاسخ می‌دهد.

- آیا هنوز اعداد ذخیره شده در بیت‌های ۸۰۱ام تا ۹۰۰ام برابر با ۰ و اعداد ذخیره شده در بیت‌های ۹۰۱ام تا ۱۰۰۰ام برابر با ۱ است؟

جواب ماشین به این سوال بله یا خیر خواهد بود.
سعید می خواهد در مورد عدد $x = ۸ \times M[۱] + ۴ \times M[۲] + ۲ \times M[۳] + M[۴]$ اطلاعاتی کسب کند. او دوست دارد این اطلاعات را با اجرای کمترین تعداد دستور و تنها یک بار سوال پرسیدن کسب کند. به او کمک کنید تا اطلاعات زیر را بدست اورد.
توجه: در هر قسمت ابتدا دستورات خود را نوشته و سپس آن را در چند سطر توضیح دهید. در هر قسمت باید از کمترین تعداد دستور ممکن استفاده کنید، اما نیازی به اثبات کمینه بودن تعداد دستورات نیست . دقت کنید در هر قسمت فقط یک‌بار می‌توانید سوال بپرسید.

الف) آیا x بزرگتر از ۵ است؟

ب) آیا x توانی از ۲ است؟ (دقت کنید که ۱ توانی از ۲ است).

پ) آیا x بر ۳ بخش‌پذیر است؟

مسئله‌ی ۲: بازی ..... ۲۵ امتیاز

به یک جدول $n \times n$ یک مربع لاتین می‌گوییم، هرگاه درهر یک از خانه‌های آن یکی از اعداد $1, 2, \cdots, n$ نوشته شده باشد و در هیچ سطر و هیچ ستونی عدد تکراری نداشته باشیم. فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰۰ است. $n!$ نفر روی یک مربع لاتین $n \times n$ دلخواه شروع به بازی می‌کنند. هر کس درنوبت خود می‌تواند جای دو سطر و یا دو ستون از جدول را با هم عوض کند. اولین کسی که حرکتی انجام بدهد که یک مربع لاتین تکراری ایجاد شود بازنده‌ی بازی است و بقیه افراد برنده می‌شوند. ثابت کنید $n! - 1$ نفر اول می‌توانند با هم تبانی کنند تا نفر $n!$ام (آخرین نفری که حرکت اولش را انجام می‌دهد) بازنده شود.

مسئله‌ی ۳: تکرار رشته‌ها ..... ۲۵ امتیاز

فرض کنید $w_1, \cdots, w_n$ رشته‌هایی متمایز با حروف انگلیسی کوچک باشند که مجموع طول آن‌ها از Q تجاوز نمی‌کند. W را نیز یک رشته انگلیسی دلخواه با طول Q در نظر بگیرید.

عدد a_i (که $i = 1, \cdots, n$ است) را برابر تعداد ظاهرشدن رشته w_i در W تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال، اگر $w_1 = ab$، $w_2 = aca$، $w_3 = bb$ و $W = abcabbb$ باشند، آنگاه $a_1 = 2$، $a_2 = 0$ و $a_3 = 2$ خواهد بود.

ثابت کنید:

$$\min(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq \frac{2 \times Q \times \sqrt{Q}}{n}$$

مسئله‌ی ۴: رنگ‌آمیزی بازه‌ها ..... ۳۰ امتیاز

فرض کنید $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \cdots, [x_n, y_n]$، n بازه روی محور اعداد حقیقی باشند. می‌خواهیم این بازه‌ها را با تعدادی رنگ که هر رنگ با یک عدد طبیعی شناخته می‌شود، رنگ‌آمیزی کنیم.

در یک رنگ‌آمیزی، $f(x)$ را برابر بزرگترین رنگ بازه‌ها بین بازه‌هایی که شامل نقطه‌ی x می‌شوند، تعریف می‌کنیم. بدیهی است که $f(x)$ فقط برای نقاطی که حداقل درون یک بازه قرار دارند تعریف می‌شود. به یک رنگ‌آمیزی زیبا می‌گوییم، اگر برای هر نقطه مثل x روی محور اعداد حقیقی که حداقل درون یک بازه قرار دارد، دقیقا یک بازه با رنگ $f(x)$ شامل نقطه‌ی x شود.

ما در ابتدا همه‌ی بازه‌ها را در اختیار نداریم و بازه‌ها یکی یکی در اختیار ما قرار می‌گیرند. به محض آنکه یک بازه را دریافت کردیم باید یک رنگ به آن اختصاص دهیم و مجاز به تغییر آن در آینده نیستیم. از روش زیر برای رنگ‌آمیزی بازه‌ها استفاده می‌کنیم:

فرض کنید بازه v را دریافت کرده باشیم. رنگ‌های $1, 2, 3, \cdots$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ امتحان می‌کنیم تا به اولین رنگی برسیم که اگر آن رنگ را به بازه‌ی v اختصاص بدهیم، رنگ‌آمیزی زیبا بماند. (با توجه به محدود بودن تعداد بازه‌ها، چنین رنگی حتما وجود دارد.) بازه‌ی v را با آن رنگ، رنگ می‌کنیم و به سراغ بازه‌ی بعد می‌رویم و تا آخرین بازه همین روند را انجام می‌دهیم.

الف) فرض کنید iامین بازه‌ای که دریافت می‌کنیم $[x_i, y_i]$ باشد و در ضمن بدانیم $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ و $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$. نشان دهید بعد از دریافت n بازه، تعداد رنگ‌های استفاده شده، از $\log_2 n + 1$ تجاوز نمی‌کند.

ب) با فرض آنکه بازه‌ها دلخواه باشند و با یک ترتیب دلخواه بازه‌ها را دریافت کنیم، نشان دهید بعد از دریافت n بازه، تعداد رنگ‌های استفاده شده، از $3\sqrt{n}$ تجاوز نمی‌کند.

مسئله‌ی ۱: مرتب سازی ..... ۲۰ امتیاز

دنباله A شامل n^2 عدد طبیعی، داده شده‌است. می‌دانیم هر یک از اعداد ۱ تا n دقیقا n بار در این دنباله آمده‌اند. می‌خواهیم این دنباله را به صورت صعودی مرتب کنیم. در هر مرحله می‌توان n عضو این دنباله را انتخاب کرده و آن‌ها را به یک ترتیب دلخواه در مکان‌های قبلی‌شان نوشت. می‌خواهیم در کمترین تعداد مرحله، دنباله را مرتب کنیم. به عنوان مثال، دنباله زیر در ۲ مرحله مرتب می‌شود:

$< ۱, ۱, \underline{۲}, \underline{۳}, ۲, ۳, ۲, ۳, \underline{۱} > \Rightarrow < ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, \underline{۳}, \underline{۲}, ۳, \underline{۳} > \Rightarrow < ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳ >$

ثابت کنید هر دنباله دلخواه A را می‌توان در حداکثر $n+۱$ مرحله مرتب کرد.

مسئله‌ی ۲: جاده‌ها ..... ۲۵ امتیاز

کشور آتلانتیس دارای $۲n$ شهر است که هر دو شهر با یک جاده (خاکی یا آسفالت) مستقیم به یکدیگر متصل هستند. یک روز، وزارت راه این کشور که سابقه طولانی در اتخاذ تصمیم‌های عجیب و غریب دارد، تصمیم می‌گیرد تا شهرهای کشور را به دو استان (نه لزوماً با تعداد شهرهای برابر) تقسیم کند. این تصمیم باید طوری اجرایی شود که هر جاده میان دو شهر در یک استان، آسفالت باشد. برای انجام این هدف، وزارت راه در نظر دارد هر روز n جاده که هیچ دو جاده‌ای به یک شهر منتهی نیستند را انتخاب کرده و همه‌ی جاده‌های خاکیِ انتخاب شده را آسفالت و همه‌ی جاده‌های آسفالتِ انتخاب شده را خاکی کند. با فرض این که نوع جاده‌ها در روز آغازین دلخواه هستند، آیا وزارت راه موفق می‌شود کشور را به دو استان با شرایط گفته شده تقسیم کند؟

مسئله‌ی ۳: خرگوش نامرئی ..... ۲۵ امتیاز

۱۳۹۱ سکو در یک ردیف قرار دارند و یک خرگوش نامرئی روی یکی از سکوها نشسته‌است. می‌خواهیم این خرگوش را شکار کنیم. در هر مرحله می‌توانیم به یکی از این سکوها شلیک کنیم. اگر خرگوش روی سکویی که به آن شلیک شده نشسته باشد، شکار می‌شود؛ در غیر این صورت به علت ترس از صدای تیراندازی، روی یکی از دو سکوی مجاورش (در صورت وجود) می‌پرد. روشی برای تیراندازی‌ها ارائه‌دهید که مطمئن باشیم بعد از حداکثر ۱۰۰۰۰ شلیک، خرگوش حتما شکار می‌شود.

باشگاه المپیاد طلاب‌ها

مسئله‌ی ۴: رایانه باستانی ..... ۳۰ امتیاز

باستان‌شناسان در زمان حفاری شهر باستانی آتلانتیس به یک رایانه باستانی برخوردند که در عین سادگی دارای توانایی‌های بسیاری بود. بعد از انجام بررسی‌های اولیه مشخص شد که این رایانه برای انجام محاسبات، اعداد را به صورت نمایش در مبنای ۲ و در رشته‌های به طول ۳۲ از ارقام ۰ و ۱ نگهداری می‌کند. به هر یک از ارقام ۰ و ۱ در نمایش دودویی، یک بیت گفته می‌شود و بیت‌ها را از سمت راست به چپ با اعداد ۰ تا ۳۱ شماره‌گذاری می‌کنیم. به عنوان مثال این رایانه برای ذخیره عدد ۲۷ رشته زیر را نگهداری می‌کند:

00000000000000000000000000011011

برای نگهداری اعداد، این رایانه یک حافظه ۲۶ خانه‌ای دارد که در هر خانه می‌تواند یک عدد ۳۲ بیتی را ذخیره کند. این خانه‌ها با حروف a تا z نام‌گذاری می‌شوند. همچنین مشخص شده‌است این رایانه توانایی انجام عملیات‌های "و بیتی"، "یا بیتی"، "نقیض بیتی"، "شیفت بیتی به سمت راست"، جمع و ضرب را دارد.

برای نمایش راحت‌تر اعداد، هر عدد را به صورت یک عدد ۸ رقمی در مبنای ۱۶ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال عدد ۲۷ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم: (دقت کنید ارقام ۱۵ , ۱۱, ۱۰, ۱۰ در مبنای ۱۶ با $A, B, \cdots, F$ نمایش داده می‌شوند)

0000001B

هر دستور در این رایانه، یکی از عملیات‌های بالا را روی اعداد ثابت یا اعداد درون حافظه‌ها اجرا کرده و نتیجه را در یکی از خانه‌های حافظه ذخیره می‌کند. دستورهای این رایانه به شکل زیر استفاده می‌شوند:

دستور	عملکرد	توضیح
ADD a, b, c	مقدار حافظه a را برابر حاصل جمع b و c قرار می‌دهد	
MLT a, b, c	مقدار حافظه a را برابر حاصل ضرب b و c قرار می‌دهد	
AND a, b, c	مقدار حافظه a را برابر حاصل "و منطقی" b و c قرار می‌دهد	بیت iام در حافظه a در صورتی برابر ۱ می‌شود که بیت iام هم در b و هم در c برابر ۱ باشد
OR a, b, c	مقدار حافظه a را برابر حاصل "یا منطقی" b و c قرار می‌دهد	بیت iام در حافظه a در صورتی برابر ۱ می‌شود که بیت iام در حداقل یکی از b و c برابر ۱ باشد
SHR a, b, c	b را c واحد به سمت راست شیفت داده و در a ذخیره می کند.	مقدار a را برابر $۰۰\cdots۰b_{۳۱}b_{۳۰}\cdots b_c$ قرار می دهد(مقدار b تغییر نمی‌کند)
NOT a, b	"نقیض منطقی" b را در a ذخیره می کند.	بیت iام در حافظه a در صورتی برابر ۱ می‌شود که بیت iام درb برابر ۰ باشد

هر برنامه در این کامپیوتر دنباله‌ای از دستورها است که به ترتیب اجرا می‌شوند. به عنوان مثال فرض کنید دو عدد در حافظه‌های a و b ذخیره شده‌اند. برنامه زیر مشخص می‌کند که حاصل جمع آن‌ها به ۲ بخش‌پذیر است یا نه (اگر بخش‌پذیر باشد عدد ۱ را در حافظه z ذخیره می‌کند و در غیر این صورت عدد ۰ را در حافظه z ذخیره می‌کند)

```
ADD c, a, b
AND d, c, 00000001
NOT e, d
AND z, e, 00000001
```

بعد از انجام تحقیقات مرحله دوم مشخص شد که این رایانه دارای یک دستور عجیب نیز هست که تعداد بیت‌های در اندیس‌های زوج یک عدد که دارای مقدار ۱ هستند را در یک خانه حافظه ذخیره می‌کند. برای استفاده از این دستور باید به شکل زیر عمل کرد:

CNT a, b

بعد از اجرای این دستور، تعداد بیت های ۱ در اندیس‌های زوج عدد در حافظه b(یا عدد ثابت b) در خانه حافظه a ذخیره می‌شود. به عنوان مثال بعد از اجرای برنامه زیر، عدد ۲ در متغیر z ذخیره می‌شود،زیرا بیت‌های a و a_2 دارای مقدار ۱ خواهند بود :

ADD a, 00000002, 00000005
CNT z, a

توجه: در هر قسمت ابتدا برنامه خود را نوشته و سپس آن را در چند سطر توضیح دهید.

الف) برنامه‌ای بنویسید که با استفاده از ۴ دستور، تعداد بیت‌های با مقدار ۱ عددی را که در حافظه a ذخیره شده است را در حافظه z ذخیره کند.

ب) اولین برنامه‌ای که برای این کامپیوتر کشف شد، برنامه‌ای بود که تعداد تکرارهای رشته ۰۱ را در نمایش دودویی عددی که در حافظه a ذخیره شده است، به شرطی که ۰ در یک اندیس فرد و ۱ در یک اندیس زوج آمده باشد را محاسبه و در حافظه z ذخیره می‌کرد. به عنوان مثال اگر عدد درون حافظه a برابر $DDABCDEF$ باشد، این مقدار برابر ۳ است.

a = 11011101101010111100110111101111

برنامه‌ای با حداکثر ۴ دستور بنویسید تا این کار را انجام دهد. برای برنامه خود شیوه کارکرد آن را در چند سطر توضیح دهید.

پ) بعد از کشف برنامه قسمت قبل، محققان برنامه‌ای را پیدا کردند که عملکرد دستور CNT را شبیه‌سازی می‌کرد. اما متاسفانه یک عدد در دستور آخر برنامه قابل خواندن نبود. این برنامه به شکل زیر است:(می‌توانید فرض کنید عدد درون حافظه a برابر ۵۵۵۵۵۵۵۵ نیست)

AND b, a, 55555555
SHR c, b, 00000002
ADD d, b, c
AND e, d, 33333333
MLT f, e, 11111111
SHR z, f, ...

عدد مربوط به مکان خالی را کامل کنید و راه حل خود را توضیح دهید.

موفق باشید!