

مرحله‌ی اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال‌های ۲۵ تا ۳۰ در چند دسته‌ی سؤال‌ی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است. جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ کاغذی به ضخامت یک دهم میلی‌متر داده شده است. این کاغذ را بیست بار تا می‌زنیم. با هر بار تا زدن ضخامت کاغذ دو برابر می‌شود. ضخامت نهایی کاغذ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟ فرض کنید کاغذ به اندازه‌ی کافی برای تا زدن بزرگ است.

(۱) ۲ میلی‌متر (۲) ۱۰۰ متر (۳) ۱ متر (۴) ۱۰ سانتی‌متر (۵) ۲ سانتی‌متر

		۳

۲ می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۹ را در یک جدول 3×3 بچینیم طوری که اعداد هر سطر از چپ به راست و اعداد هر ستون از بالا به پایین به صورت صعودی مرتب باشند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، با این فرض که مکان عدد ۳ در جدول همانند شکل روبه‌رو از پیش تعیین شده است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵ (۵) ۱۷

۳ کلاس اول مدرسه‌ی محمودآباد ۱۲ دانش‌آموز دارد. معلم کلاس قصد دارد دانش‌آموزان را به سه دسته تقسیم کند و بین هر دو دانش‌آموزی که هم‌دسته نیستند، یک مسابقه برگزار کند. اگر تقسیم‌بندی طوری انجام شود که تعداد مسابقات بیشینه شود، این بیش‌ترین تعداد چند تا است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۴۲ (۴) ۴۸ (۵) ۶۶

۴ روی محور اعداد حقیقی ۱۳۹۲ نقطه‌ی رنگی متمایز داده شده است که هر یک با یکی از ۹۲ رنگ موجود رنگ شده‌اند. یک بازه را «مینیمال رنگی» می‌گوییم اگر همه‌ی رنگ‌ها را پوشش دهد (یعنی از هر رنگی حداقل یک نقطه داخل آن باشد) و هیچ زیربازه‌ای از این بازه، همه‌ی رنگ‌ها را پوشش ندهد. حداکثر تعداد بازه‌های مینیمال رنگی چند تا است؟

(۱) ۱ (۲) ۱۳۰۱ (۳) ۹۱ (۴) ۹۲ (۵) ۱۳۹۱

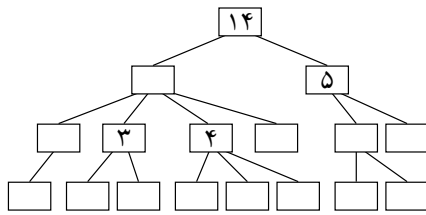
۵ ما عادت کرده‌ایم وقتی عددی را می‌بینیم آن را به طور پیش‌فرض در مبنای ده تفسیر می‌کنیم. حال تصور کنید که استفاده از مبناهای ۲ تا ۱۰ به یک اندازه رایج است. در این حالت عدد ۱۲ را می‌توان به ۸ شکل مختلف (در مبناهای ۳ تا ۱۰) تفسیر کرد، اما عدد ۴۵۹ تنها به یک شکل قابل تفسیر است. تعداد اعداد از ۱ تا ۱۳۹۲ (در مبنای ده) که تنها به یک شکل قابل تفسیراند، چند تا است؟ دقت کنید که اعداد تک‌رقمی تنها به یک شکل قابل تفسیراند.

(۱) ۳۴۹ (۲) ۲۷۱ (۳) ۴۴۰ (۴) ۳۵۸ (۵) ۳۴۸

۶ جدولی 1392×1392 داریم که خانه‌ی (۱، ۱) آن رنگ شده است. در هر مرحله جدول را از یکی از خطوط موازی اضلاع تا می‌کنیم. در صورتی که یک خانه‌ی رنگی روی یک خانه‌ی بی‌رنگ قرار گیرد، هر دو رنگی می‌شوند. پس از هر مرحله، جدول را به حالت اولیه برمی‌گردانیم. حداقل چند حرکت لازم است تا تمامی خانه‌های جدول رنگی شوند؟

(۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۱۱ (۵) ۲۲

مرحله‌ی اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور



۷ درخت وراثت نموداری برای نشان دادن میزان ارثی است که به هر یک از اعضای یک خانواده طی سال‌ها رسیده است. فرض کنید تمام اموال هر فرد بین فرزندانش (در صورتی که فرزندی داشته باشد) تقسیم می‌شود. میزان ارث هر نفر عددی صحیح و نامنفی است. به چند طریق می‌توان درخت وراثت روبه‌رو را تکمیل نمود؟

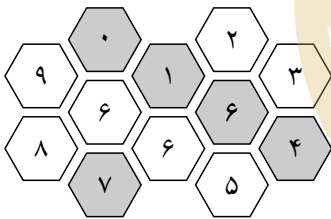
۴۰۳۲ (۱) ۱۱۳۴ (۲) ۳۷۸۰ (۳) ۲۰۱۶ (۴) ۱۵۱۲ (۵)

۸ روی یک خط ۱۳۹۲ درخت قرار گرفته‌اند که فاصله‌ی هر دو درخت متوالی از هم ۱۰۰ واحد است. ارتفاع درخت‌ها یک عدد صحیح از ۱ تا ۱۳۹۲ است و ارتفاع هیچ دو درختی برابر نیست. ما می‌توانیم در هر گام یکی از درخت‌ها را انتخاب کرده، آن را ببریم. هر درخت پس از بریده شدن به سمت راست می‌افتد و در صورتی که به درخت‌های دیگری برخورد کند آن‌ها را نیز خواهد انداخت. دو درخت در صورتی برخورد می‌کنند که ارتفاع درخت افتاده بیش‌تر یا مساوی فاصله‌ی دو درخت باشد. با توجه به این که اطلاعاتی درباره‌ی ترتیب قرار گرفتن درخت‌ها نداریم، حداقل باید چند درخت را قطع کنیم تا تمامی درخت‌ها بیافتند؟

۱۲۹۲ (۱) ۶۹۶ (۲) ۵۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۳۷ (۵)

۹ در مسئله‌ی قبل، فرض کنید تعداد درخت‌ها ۵۰ و ارتفاع هر درخت یک عدد صحیح غیرتکراری از ۱ تا ۵۰ است. همچنین فاصله‌ی بین تمامی درخت‌ها عدد صحیح x است. در ضمن ترتیب چیدن درخت‌ها نیز در اختیار ما است. می‌خواهیم x را طوری تعیین کنیم که بتوان با یک برش تمامی درخت‌ها را انداخت. مقدار x حداکثر چند است؟

۱۶ (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۱۷ (۵)



۱۰ تعدادی شش‌ضلعی همانند شکل مقابل داریم که داخل هر خانه یک عدد نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان یکی از خانه‌هایی را که دقیقاً شش همسایه دارد انتخاب کرد و تمام شش‌ضلعی‌های دور آن را در جهت عقربه‌های ساعت چرخاند. می‌خواهیم مجموع اعداد در خانه‌های خاکستری بیشینه شود. این مجموع بیشینه چند است؟ دقت کنید که در حین چرخش اعداد جابه‌جا می‌شوند ولی رنگ خانه‌ها ثابت می‌ماند.

۳۶ (۱) ۳۰ (۲) ۲۶ (۳) ۱۸ (۴) ۳۲ (۵)

۱۱ به چند حالت می‌توان چهار وزیر را روی یک صفحه‌ی شطرنج 4×4 قرار داد طوری که یک‌دیگر را تهدید نکنند؟ دو وزیر یک‌دیگر را تهدید می‌کنند اگر هم‌سطر، هم‌ستون یا هم‌قطر باشند. فرض کنید صفحه‌ی شطرنج ثابت است و نمی‌چرخد.

۱ (۱) ۰ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۲ (۵)

۱۲ یک صفحه‌ی شطرنج 6×6 داریم که یک مهره‌ی اسب در خانه‌ی (۱, ۱) آن قرار گرفته است. می‌دانیم که اسب به شکل L روی صفحه حرکت می‌کند. روی هر خانه حداقل تعداد حرکات لازم برای رسیدن اسب به آن خانه را نوشته‌ایم. بزرگ‌ترین این اعداد چند است؟

۳ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

مرحله‌ی اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

یک جدول ۸ در ۸ داریم. هر خانه یک قرینه نسبت به نقطه‌ی وسط دارد. برای مثال خانه‌ی ۳ در شکل قرینه خانه‌ی ۱ نسبت به نقطه‌ی وسط می‌باشد. همچنین هر خانه یک قرینه نسبت به خط عمودی مرکزی نیز دارد. برای مثال خانه‌ی ۲ قرینه خانه‌ی ۱ نسبت به خط عمودی مرکزی می‌باشد. می‌خواهیم این جدول را با ۳ رنگ، رنگ کنیم به شرطی که هر خانه‌ی این جدول حداقل با یکی از دو خانه قرینه‌ی خود (قرینه نسبت به خانه‌ی مرکز و قرینه نسبت به خط عمودی وسط) هم‌رنگ باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۱۳

۱۵۱۶ (۵)

۹۱۶ (۴)

۳۱۶ (۳)

۳۶۴ (۲)

۱۶۱۵ (۱)

برای مرتب‌سازی، عمل «ابرجابه‌جایی» را چنین تعریف می‌کنیم. در هر ابرجابه‌جایی، یک زیررشته‌ی دلخواه از دنباله‌ی داده‌شده را معکوس می‌کنیم. برای مثال دنباله‌ی (۱, ۴, ۳, ۲, ۵) با یک ابرجابه‌جایی مرتب می‌شود. کافی است زیررشته‌ی (۴, ۳, ۲) را معکوس کنیم. ولی برای مرتب‌سازی دنباله‌ی (۴, ۲, ۳, ۱) دو ابرجابه‌جایی نیاز داریم. ابتدا کل دنباله را معکوس می‌کنیم تا به (۱, ۳, ۲, ۴) برسیم. سپس زیررشته‌ی (۳, ۲) را معکوس می‌کنیم. حداقل تعداد ابرجابه‌جایی که برای مرتب‌سازی هر دنباله‌ی دلخواه به طول ۴ کافی است، چند است؟

۱۴

(۱) در برخی حالات مرتب‌سازی با ابرجابه‌جایی ممکن نیست. ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۵ (۵)

«جدول صفر و یک» به جدولی می‌گوییم که در هر خانه‌ی آن صفر یا یک قرار گرفته است. عملی را تعریف می‌کنیم که از روی یک جدول صفر و یک ۴×۴ ، یک جدول صفر و یک ۴×۴ دیگر را به این شکل می‌سازد که هر خانه‌ی جدول جدید برابر حاصل ضرب خانه‌های مجاور آن خانه در جدول قدیمی است (خانه مجاور یک خانه، خانه‌ای است که با آن خانه یک ضلع مشترک دارد). برای مثال با دو بار اعمال این عمل روی جدول زیر به «جدول تمام صفر» (جدولی که تمام خانه‌های آن صفر است) می‌رسیم.

۱۵

۱	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۰

→

۱	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰

→

۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰

تعداد کل جدول‌های صفر و یک ۴×۴ که با تکرار این عمل روی آن‌ها به جدول تمام صفر نمی‌رسیم چند تا است؟

۳ (۵)

۰ (۴)

۱ (۳)

۵۱۱ (۲)

۱۲۰ (۱)

تعداد رشته‌های ۱۰ تایی از ارقام را بیابید که در هر یک از آن رشته‌ها هر رقم برابر با تعداد رقم‌های یک مجاورش باشد.

۱۶

۲ (۵)

۱۲ (۴)

۱۴ (۳)

۱ (۲)

۲۰ (۱)

تعداد رشته‌های ۱۰ تایی از ارقام را بیابید که در هر یک از آن رشته‌ها هر رقم برابر با تعداد رقم‌های صفر مجاورش باشد.

۱۷

۲۰ (۵)

۱۶ (۴)

۲۲ (۳)

۱۰ (۲)

۱۴ (۱)

مرحله‌ی اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۸ ۱۳۹۳ بادکنک را به ترتیب در یک ردیف قرار داده‌ایم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از بادکنک‌ها را بترکانیم. فقط باید این شرط رعایت شود که هر بادکنکی که می‌ترکد تعداد بادکنک‌های سمت چپ و راست آن که ترکیده‌اند حداکثر یکی اختلاف داشته باشد. به چند طریق می‌توانیم این بادکنک‌ها را بترکانیم؟

(۱) ۳۶۹۷ (۲) ۲۶۹۷ (۳) ۲۶۹۶ (۴) ۳۶۹۶ (۵) ۲۱۳۹۳

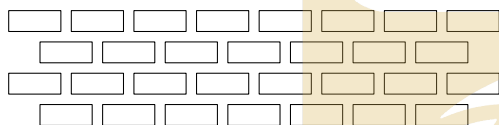
۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰

۱۹ خیکوله و خیکولتا روی جدول 4×4 روبه‌رو بازی زیر را انجام می‌دهند:

۱. ابتدا خیکوله سطرها را به دلخواه جابه‌جا می‌کند (سطرها را جایگشت می‌دهد).
۲. سپس ستون‌ها را به دلخواه جابه‌جا می‌کند (ستون‌ها را جایگشت می‌دهد).
۳. سپس خیکولتا تعداد جفت ۱‌های مجاور را می‌شمارد (دو خانه‌ای که ضلع مشترک دارند مجاورند) و به تعداد آن به خیکوله شکلات می‌دهد.

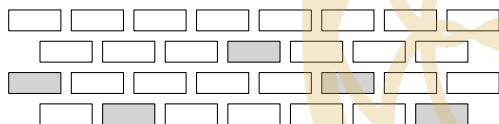
اگر خیکوله به بهترین نحو ممکن بازی کند چند شکلات می‌تواند به دست بیاورد؟

(۱) ۱۴ (۲) ۱۷ (۳) ۱۶ (۴) ۱۵ (۵) ۱۳



۲۰ تعدادی آجر همانند شکل مقابل داده شده‌اند. هر آجر روی یک یا دو آجر دیگر و یا روی زمین قرار دارد. آجری که روی زمین نیست تنها زمانی می‌افتد که آجر دیگری زیرش قرار نداشته باشد. می‌خواهیم تعدادی از آجرها را برداریم طوری که آجرهای سطر بالا برداشته نشوند و هیچ آجری نیفتد. در این صورت حداکثر چند آجر را می‌توان برداشت؟

(۱) ۱۱ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳ (۵) ۱۴



۲۱ همانند مسئله‌ی قبل آجرهایی همانند شکل روبه‌رو داریم، با این تفاوت که آجرهای خاکستری نباید برداشته شوند. در این صورت حداکثر چند آجر را می‌توان برداشت؟

(۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴) ۶ (۵) ۷

۲۲ جدولی 1392×1392 داریم. خانه‌های این جدول را به ترتیب با اعداد ۰ تا $1392^2 - 1$ به ترتیب سطری از بالا به پایین و سپس ستونی از چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم. به این ترتیب خانه‌های سطر i ام با اعداد $1392 \times i$ تا $1392 \times (i+1) - 1$ از چپ به راست شماره‌گذاری شده‌اند. دو خانه از جدول را مجاور می‌نامیم در صورتی که در یک ضلع اشتراک داشته باشند و آن ضلع توسط هیچ کدام از آن دو خانه بسته نشده باشد. طریقه‌ی بسته شدن اضلاع جدول این‌گونه است که عدد نوشته شده در خانه را به صورت دودویی می‌نویسیم. در صورتی که این عدد کمتر از چهار رقم داشت با گذاشتن ۰ در پشت عدد، آن را چهار رقمی می‌کنیم. حال یک بودن هر کدام از چهار رقم اول این عدد باعث بسته شدن ضلع متناظرش می‌شود. ارقام اول تا چهارم به ترتیب با ضلع‌های بالا، راست، پایین و چپ آن خانه متناظرند. (رقم اول کم ارزش‌ترین رقم در نمایش دودویی است). یک حرکت مجاز را رفتن از خانه‌ای به یکی از خانه‌های مجاورش تعریف می‌کنیم. حال در جدول ساخته‌شده به یک مجموعه از خانه‌ها «همبند» می‌گوییم اگر هر دو خانه با انجام تعدادی حرکت مجاز از یک‌دیگر قابل دسترسی باشند. اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه‌ی همبند این جدول را محاسبه کنید.

(۱) ۴۱۷۶ (۲) ۲۷۸۴ (۳) ۶۹۶۰ (۴) ۵۵۶۸ (۵) ۱۳۹۲

مرحله‌ی اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

دنباله‌ی $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ بر روی کاغذ نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان یکی از تغییرات زیر را روی دنباله اعمال کرد:

- تمامی اعداد داخل لیست در دو ضرب می‌شوند.
- یکی از اعداد دنباله انتخاب و به‌علاوه‌ی یک می‌شود.

کم‌ترین تعداد مرحله برای رسیدن به دنباله‌ی $(7, 11, 5, 1, 3, 8)$ چند است؟

۱۴ (۱) ۱۸ (۲) ۱۷ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶ (۵)

۲۴ مار کوچکی متشکل از ۸ مکعب به ضلع ۱ همانند شکل زیر داریم که از سر تا دم با شماره‌های ۱ تا ۸ شماره‌گذاری شده‌اند. هر دو مکعب پشت سر هم با مفصل کوچکی به هم وصل شده‌اند و فقط قابلیت چرخش نسبت به یک‌دیگر را دارند. این مار کوچک را به چند حالت مختلف می‌توان در یک جعبه‌ی مکعبی به ضلع ۲ جا داد؟ دو حالت مختلف در نظر گرفته می‌شوند اگر دو قطعه با شماره‌های مختلف از بدن مار در یک مکان از جعبه‌ی مکعبی قرار بگیرند. یعنی اگر دو حالت با چرخش جعبه‌ی مکعبی به هم تبدیل شوند، یکسان نیستند.



۱۹۲ (۱) ۹۶ (۲) ۴۸ (۳) ۶۴ (۴) ۱۴۴ (۵)

برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

- مقدار s را برابر با ۰ قرار بده.
- به ازای $i = 1, 2, \dots, x$ عملیات زیر را انجام بده:

– اگر x به i بخش‌پذیر بود، مقدار s را برابر با $s + i$ قرار بده.

- مقدار s را گزارش کن.

فرض کنید خروجی برنامه‌ی بالا برابر با $f(x)$ باشد. به طور مثال اگر x را برابر با ۴ قرار دهیم، به ازای $i = 1, 2, \dots, 4$ مقدار s افزایش پیدا می‌کند. پس مقدار $f(4)$ برابر با ۷ خواهد بود.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۵ مقدار $f(441)$ برابر با چند است؟

۳۶۲ (۱) ۷۴۰ (۲) ۷۶۲ (۳) ۳۰۰ (۴) ۷۴۱ (۵)

۲۶ مقدار $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)$ برابر با چند است؟

۳۲۴۹ (۱) ۸۳۵۴ (۲) ۸۲۹۹ (۳) ۸۲۴۹ (۴) ۳۲۹۹ (۵)

مرحله‌ی اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

اخیرا در پی آزمایش‌های هسته‌ای در مجمع‌الجزایر پنیر، جنگی بین دو کشور پنیر شمالی و پنیر جنوبی در گرفته است. در این مجمع‌الجزایر ۱۰ جزیره وجود دارد که این دو کشور در پی تصرف آن‌ها هستند. در این جنگ هر یک از دو کشور به هر جزیره تعدادی نیرو اعزام می‌کند و در هر جزیره کشوری که نیروی بیش‌تری اعزام کرده باشد، پیروز نبرد خواهد شد و اگر تعداد نیروها مساوی باشد جزیره به هیچ یک از دو کشور تعلق نخواهد گرفت. اما همه می‌دانند که کشور پنیر جنوبی با همکاری کشورهای دیگر به تکنولوژی‌ای دست یافته که می‌تواند تعداد نیروهایی که طرف مقابل به هر جزیره ارسال می‌کند را پیش‌بینی کند و بر اساس آن نیروهای خود را به جزیره‌ها بفرستد. می‌دانیم هر یک از دو کشور بهترین شیوه را برای تصاحب بیش‌ترین تعداد جزیره به کار می‌بندند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۷ اگر کشور پنیر شمالی ۱۰۰ نیرو و کشور پنیر جنوبی ۴۵ نیرو در اختیار داشته باشد. کشور پنیر شمالی حداکثر چند جزیره را می‌تواند تصاحب کند؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۴ (۵)

۲۸ اگر کشور پنیر جنوبی ۴۵ نیرو در اختیار داشته باشد، کشور پنیر شمالی حداقل چند نیرو باید داشته باشد تا مطمئن باشد که نیمی از جزیره‌ها را تصاحب می‌کند؟

- ۶۸ (۱) ۷۰ (۲) ۶۹ (۳) ۷۳ (۴) ۷۵ (۵)

شش نفر دور یک میز نشسته‌اند که هر یک از آن‌ها کلاه‌ی بر سر دارد. کلاه‌ها به رنگ‌های قرمز، آبی و سبز هستند. می‌دانیم که از هر رنگ حداقل یک کلاه وجود دارد. هر کسی می‌تواند رنگ کلاه پنج نفر دیگر را ببیند، اما توان دیدن رنگ کلاه خود را ندارد. این شش نفر بسیار باهوش هستند و در صورتی که از لحاظ منطقی امکان تشخیص رنگ کلاه خود با توجه به رنگ کلاه دیگران وجود داشته باشد، رنگ کلاه خود را تشخیص می‌دهند. برای مثال اگر شخصی هیچ کلاه‌ی با رنگ آبی روی سر پنج نفر دیگر نبیند، متوجه می‌شود که رنگ کلاه او آبی است، چرا که می‌داند از هر رنگ باید حداقل یک کلاه، در بین کلاه‌ها موجود باشد.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۹ اگر از این شش نفر بخواهیم در صورتی که توان تشخیص رنگ کلاه خود را دارند، دست خود را هم‌زمان بلند کنند، با فرض پاسخ صادقانه حداقل و حداکثر چند نفر ممکن است دست خود را بلند کنند؟

- ۲ و ۲ (۱) ۲ صفر و ۶ (۲) ۳ صفر و ۲ (۳) ۴ و ۲ (۴) ۵ و ۶ (۵)

۳۰ حالا پس از این پاسخ صادقانه، مجدداً از این شش نفر می‌خواهیم که در صورتی که هم اکنون رنگ کلاه خود را می‌دانند، دست خود را بلند کنند. در این حالت (باز با فرض پاسخ صادقانه) حداقل و حداکثر چند نفر ممکن است دست خود را بلند کنند؟

- ۱ صفر و ۲ (۱) ۲ صفر و ۶ (۲) ۳ و ۲ (۳) ۴ و ۶ (۴) ۵ و ۲ (۵)