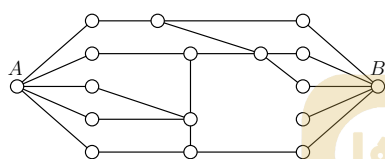


مرحله‌ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال‌های ۲۴ تا ۳۰ در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

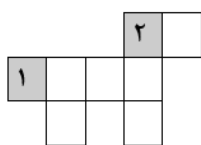
۱ به چند طریق می‌توان در یک جدول 3×3 دو مهره‌ی شاه با رنگ‌های سیاه و سفید گذاشت طوری که همدیگر را تهدید نکنند؟ هر مهره‌ی شاه تمام مهره‌های ۸ خانه‌ی مجاورش را تهدید می‌کند.

۹ (۱) ۱۲ (۲) ۴۸ (۳) ۳۲ (۴) ۱۶ (۵)



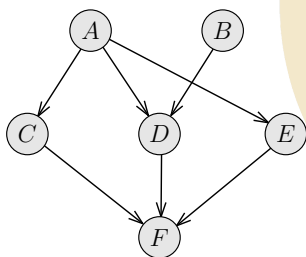
۲ در شکل مقابل می‌خواهیم با حذف تعدادی از پاره‌خط‌ها به حالتی برسیم که دیگر مسیری از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B وجود نداشته باشد. حداقل چند پاره‌خط باید حذف شوند؟

۱ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵)



۳ در جدول مقابل می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را به گونه‌ای قرار دهیم که اعداد در هر سطر از چپ به راست صعودی و در هر ستون نیز از بالا به پایین صعودی باشند. اگر مکان قرار گرفتن اعداد ۱ و ۲ در جدول مطابق شکل مقابل باشد، بقیه‌ی اعداد را به چند طریق می‌توان در جدول چید؟ دقت کنید که دو خانه‌ی پایینی جدول در یک سطر قرار دارند.

۲۴ (۱) ۱۲ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۱۸ (۵)



۴ شش درس با نام‌های A تا F داریم که روابط پیش‌نیازی آن‌ها در شکل مقابل نشان داده شده است. اگر درس x پیش‌نیاز درس y باشد، آن گاه پیکانی از x به y در این شکل رسم شده است. می‌خواهیم این شش درس را در شش ترم متوالی و در هر ترم یک درس بگیریم طوری که تمامی روابط پیش‌نیازی رعایت شده باشند، یعنی اگر درس x پیش‌نیاز درس y است، آن گاه درس x باید پیش از درس y گرفته شود. به چند ترتیب مختلف می‌توان درس‌ها را با رعایت روابط پیش‌نیازی گرفت؟ به طور مثال، ترتیب $\langle A, B, D, E, C, F \rangle$ یک ترتیب مجاز است.

۱۸ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۴ (۴) ۲۴ (۵)

۵ در ایستگاه تاکسی موصّل به صلاح‌الدین، مردم برای استفاده از تاکسی در صف می‌ایستند. به محض آمدن یک تاکسی، اگر تعداد افراد صف حداقل چهار نفر بود، ۴ نفر جلوی صف و در غیر این صورت تمام افراد صف در تاکسی می‌نشینند و تاکسی بلافاصله حرکت می‌کند. سه تروریست می‌خواهند از موصّل به صلاح‌الدین بروند. آن‌ها یک تفنگ دارند و می‌توانند با هر تیر آن، یک نفر از افراد دیگر صف را بکشند. این سه تروریست همزمان به انتهای صف رسیده و می‌خواهند حتماً با هم در یک تاکسی بنشینند. قبل از آن که آن‌ها به ایستگاه تاکسی بروند، می‌خواهند تعدادی تیر با خود بردارند که بتوانند به طور تضمینی، به هدفشان (نشستن با هم در تاکسی) برسند. آن‌ها حداقل چند تیر باید با خود بیاورند؟

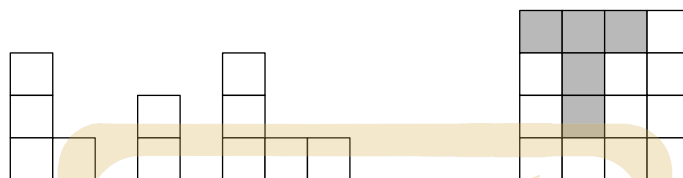
۲ (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۰ (۵)

مرحله‌ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۶ دو تاس در اختیار داریم. پس از پرتاب آن‌ها به اندازه‌ی ضرب دو عددی که روی تاس‌ها آمده امتیاز می‌گیریم. اگر هر تاس با احتمال یکسان عددی بین ۱ تا ۶ بیاورد، به صورت میانگین چه امتیازی می‌توانیم کسب کنیم؟

- (۱) $10/25$ (۲) ۹ (۳) $12/25$ (۴) $13/5$ (۵) $12/5$

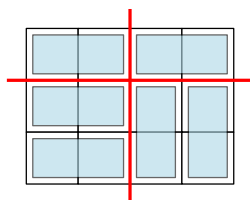
۷ به چند طریق می‌توان خانه‌های خالی (سفید رنگ) جدول 4×4 پایین سمت راست را با قطعاتی که در شکل پایین سمت چپ می‌بینید پر کرد، طوری که هر خانه توسط دقیقاً یک قطعه پوشیده شود و قطعه‌های استفاده‌شده به طور کامل درون خانه‌های سفید جدول قرار بگیرند؟ از هر قطعه به تعداد دل‌خواه وجود دارد و قطعات را می‌توان چرخاند یا دوران داد.



- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۱ (۵) ۴

۸ امروز بانک شهر فسقلی‌ها ۵۰ مشتری دارد. مشتری‌ها در یک صف ایستاده‌اند و هرکدام کارتی دارد که نوبت او را مشخص می‌کند (عدد بین ۱ تا ۵۰). این بانک سه باجه برای پاسخ‌گویی دارد و هر مشتری اگر نوبت به او برسد می‌تواند به یکی از این سه باجه مراجعه کند. ساعت ۱۲ ظهر است و هم‌اکنون به ترتیب در سه باجه نوبت مشتری‌های ۴۴، ۴۸ و ۵۰ است. این ۵۰ مشتری به چند طریق از سه باجه می‌توانند استفاده کرده باشند؟

- (۱) $3^{42} \times 2^3$ (۲) $3^{42} \times 2^2$ (۳) $3^{44} \times 2^4$ (۴) $3^{42} \times 2^4$ (۵) $3^{44} \times 2^3$



- (۱) ۲۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۲ (۴) ۲۷ (۵) ۲۴

۱۰ در یک دنیا ۱۶ کشور با شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. هر کشور با شماره‌ی x ، با کشورهای $x-1$ ، $x+1$ ، $x-4$ و $x+4$ (در صورت وجود) رابطه‌ی اقتصادی دارد. برای نمونه، کشور ۷ با کشورهای ۳، ۶، ۸ و ۱۱، و کشور ۲ با کشورهای ۱، ۳ و ۶ رابطه دارد. ۳ تا از کشورها یک اتحادیه تشکیل داده‌اند. هر سال هر کشوری که با دست کم دو تا از کشورهای اتحادیه رابطه‌ی اقتصادی داشته باشد، به اتحادیه اضافه می‌شود. با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف برای ۳ کشور اولیه‌ی اتحادیه، این اتحادیه پس از ۲۰ سال حداکثر چند کشور خواهد داشت؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۴ (۵) ۱۲

۱۱ هُزْبر یک دستگاه «سیب‌شناس» خریده است. این دستگاه ۳ سیب می‌گیرد و اگر حداقل k سیب خراب در بین این ۳ سیب وجود داشته باشد، بوق می‌زند! حال هُزْبر ۱۴ سیب خریده است و می‌داند k تا از این سیب‌ها خراب است. در حالات زیر حداکثر چند بار باید از دستگاه استفاده کند تا یکی از سیب‌های خراب را بیابد: حالت اول $k=1$ و حالت دوم $k=3$ (جواب این دو حالت به ترتیب از راست به چپ آمده‌اند).

- (۱) ۵ و ۳۶۳ (۲) ۶ و ۳۶۳ (۳) ۷ و ۳۶۳ (۴) ۷ و ۳۶۴ (۵) ۶ و ۳۶۴

مرحله‌ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۲ تعداد ۱۳۹۳ ماشین داریم. هر ماشین در یک لحظه از زمان روی یک نقطه از محور مختصات ظاهر شده و تا ابد با سرعتی ثابت در یک جهت مشخص (سمت چپ یا راست) شروع به حرکت می‌کند. در هر لحظه، ماشینی که در سمت راست همه‌ی ماشین‌های دیگر قرار بگیرد، ماشین برنده می‌نامیم. در طول زمان ماشین برنده حداکثر چند بار تغییر می‌کند؟

(۱) ۱۳۹۲ (۲) ۲۰۹۰ (۳) ۲۷۸۴ (۴) ۱۳۹۳ (۵) بی‌نهایت

۱۳ فاطمه جایگشت‌ها را خیلی دوست دارد. او همیشه درایه‌های جایگشت‌ها را از صفر شماره‌گذاری می‌کند و برای یک جایگشت عدد زیبایی آن را این گونه تعریف می‌کند: به ازای هر درایه، XOR شماره‌ی آن درایه و عددی که در آن قرار دارد را حساب می‌کند، و سپس اعداد حاصل را با هم جمع می‌کند. به نظر او هر چه عدد زیبایی یک جایگشت بیش‌تر باشد، جایگشت زیباتر است! حال به او بگویید بین جایگشت‌های مختلف اعداد ۰ تا ۶، بیش‌ترین میزان زیبایی چقدر است.

(۱) ۴۲ (۲) ۳۶ (۳) ۳۲ (۴) ۴۰ (۵) ۴۸

۱۴ تعدادی سیب و انار و پرتقال و دو گلدان جادویی داریم که محصولاتشان پس از یک ماه می‌رسند. ابتدای هر ماه می‌توانیم به یکی از شیوه‌های زیر در آن‌ها میوه بکاریم و در انتهای ماه محصول را جمع‌آوری کنیم. (هر حالت به تنهایی در یک گلدان انجام می‌شود و پس از جمع‌آوری هیچ اثری از درخت و میوه‌ی کاشته‌شده باقی نمی‌ماند):

- یک سیب بکاریم و سه سیب برداشت کنیم.
- یک انار بکاریم و پنج انار برداشت کنیم.
- یک پرتقال بکاریم و دو پرتقال برداشت کنیم.
- دو سیب و دو انار بکاریم و چهار پرتقال برداشت کنیم.

فرض کنید در ابتدا از هر میوه یکی داریم. به چه تعداد از حالات زیر می‌توان رسید؟ (۱، ۲، ۳) یعنی یک سیب و دو انار و سه پرتقال.

- (۱۳۹۳، ۲۰۱۵، ۱۴۳۶)
- (۱۳۹۳، ۱۴۳۶، ۲۰۱۵)
- (۱۳، ۷، ۴)
- (۱۰۰، ۱۰۰، ۱۰۰)

(۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴ (۵) ۰

۱۵ ۱۰۲۴ لامپ خاموش با شماره‌های ۱ تا ۱۰۲۴ در یک ردیف قرار دارند. کیان در ۱۰ مرحله کلید تعدادی از لامپ‌ها را می‌زند که منجر به تغییر وضعیت آن لامپ‌ها می‌شود (از خاموش به روشن و برعکس). اگر کیان در مرحله i ام کلید همه‌ی لامپ‌هایی را که باقی‌مانده‌ی شماره آن‌ها بر 2^i صفر نیست بزند، در پایان چند لامپ روشن وجود خواهد داشت؟

(۱) ۳۴۱ (۲) ۶۸۳ (۳) ۶۸۲ (۴) ۳۴۲ (۵) ۱۰۲۳

۱۶ یک گراف را «زیبا» می‌نامیم اگر رأسی در آن وجود داشته باشد که در تمام دوره‌های به طول فرد آمده باشد. بین تمام گراف‌های ساده‌ی ۱۰۱ رأسی زیبا، گرافی را در نظر بگیرید که بیش‌ترین تعداد یال را دارد. این گراف چند یال دارد؟

(۱) ۴۷۰ (۲) ۲۵۰۰ (۳) ۲۶۰۰ (۴) ۱۰۱ (۵) ۵۰۵۰

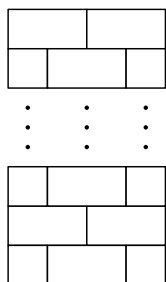
مرحله‌ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۷ یک جدول 4×4 داده شده است. می‌خواهیم شش مهره‌ی یکسان را در شش خانه‌ی متفاوت از جدول قرار دهیم طوری که در هر سطر و در هر ستون تعداد زوجی مهره قرار گرفته باشد. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

۶۴ (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۱۲۸ (۴) ۹۶ (۵)

۱۸ دنباله‌ی $\langle 1, 6, 10, 1, 5, 9, 11, 7 \rangle$ را در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان بین اعداد این دنباله عملگرهای AND و OR قرار داد طوری که حاصل عبارت برابر صفر شود؟ دقت کنید که باید هفت عملگر گذاشته شود و عملگرها از چپ به راست محاسبه می‌شوند.

۳۶ (۱) ۴۸ (۲) ۲۴ (۳) ۴۲ (۴) ۶۴ (۵)



۱۹ جدولی با ۱۰۰ سطر همانند شکل روبرو در نظر بگیرید که ۵۰ سطر آن دو خانه و ۵۰ سطر آن سه خانه دارند. می‌خواهیم از گوشه‌ی پایین چپ به گوشه‌ی بالا راست برویم به صورتی که از روی خط‌ها حرکت کرده و همواره به سمت بالا و یا راست حرکت کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۴۳۵ (۱) ۳۸۰ (۲) ۴۲۰ (۳) ۳۹۹ (۴) ۴۱۸ (۵)

۲۰ سه نفر داریم که پول هر یک از آن‌ها (به دلار) یک عدد صحیح بزرگ‌تر از صفر است و مجموع پول آن‌ها ۱۰۱ دلار است. هر گاه پول یکی از این افراد از مجموع پول دو نفر دیگر بیش‌تر باشد، می‌گوییم بین این سه نفر «تضاد طبقاتی» وجود دارد. به چند حالت ممکن است بین این سه نفر تضاد طبقاتی وجود داشته باشد؟

۳۸۲۵ (۱) ۳۶۷۵ (۲) ۱۲۷۵ (۳) ۱۲۲۵ (۴) ۷۳۵۰ (۵)

۲۱ یارا یک قطعه چوب به طول ۲۰ به یاور داده و از او خواسته که آن را به ۲۰ قطعه به طول ۱ تبدیل کند. هر بار که یاور یک قطعه چوب به طول $x + y$ را به دو قطعه با طول‌های x و y تقسیم کند، یارا $x \times y$ تومان به او و $x + y$ تومان به شاگردش می‌دهد. حداکثر پولی که یاور و شاگردش می‌توانند به دست بیاورند به ترتیب چند است؟

۱۱۶ و ۲۱۰ (۱) ۲۰۹ و ۱۹۰ (۲) ۲۰۹ و ۱۷۰ (۳) ۲۰۹ و ۱۹۰ (۴) ۸۸ و ۱۷۰ (۵)

۲۲ سلطان در نقطه‌ی ۰ از محور اعداد صحیح قرار گرفته است و گرفتار ۹ غول خطرناک با شماره‌های ۱ تا ۹ شده است. غول‌ها دو نوع هستند: دسته‌ی نخست، غول‌های راست‌گرا که دستور می‌دهند سلطان ۲ واحد به راست برود، و دسته‌ی دوم غول‌های چپ‌گرا که دستور می‌دهند سلطان ۱ واحد به چپ برود.

کار در ۹ مرحله انجام می‌شود. در مرحله‌ی i ام، غول شماره‌ی i ، دستور موردنظر را (بر اساس راست‌گرا یا چپ‌گرا بودنش) به سلطان می‌دهد. سلطان می‌تواند به دستور غول عمل کند یا این که غول را بکشد و جابه‌جا نشود. اگر سلطان یکی از غول‌ها را بکشد، خسته می‌شود و ۲ غول بعدی را نمی‌تواند بکشد. در صورتی که در انتها، سلطان در خانه‌ی ۰ مختصات باشد، آزاد می‌شود و در غیر این صورت، زندانی می‌ماند. سلطان تنها می‌داند که k تا از غول‌ها راست‌گرا هستند و $k - 9$ غول دیگر، چپ‌گرا هستند، اما شماره‌ی غول‌ها را نمی‌داند و طبیعتاً از ابتدا نمی‌داند که در مرحله‌ی i ام چه غولی دستور خواهد داد. به ازای چند عدد صحیح k با شرط $0 \leq k \leq 9$ ، سلطان الگوریتمی دارد که بتواند به طور تضمینی آزاد شود؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۰ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

دنباله‌ی $(۳, ۵, ۷, ۴, ۳, ۵, ۷, ۴, ۵, ۶, ۵)$ را در نظر بگیرید. دستگاهی داریم که می‌تواند جمع هر بازه از این اعداد را حساب کند. یعنی اگر دو عدد i و j را به آن بدهیم $(i \leq j)$ ، جمع اعداد i ام تا j ام (شامل خود این دو عدد) را محاسبه می‌کند. اما این دستگاه یک مشکل دارد و آن این که در هنگام حساب کردن جمع اعداد (در مبنای دو) سرریز اعداد (دو بر یک آن‌ها) را حساب نمی‌کند. یعنی برای ورودی‌های ۶ و ۷ که باید جمع ۵ و ۳ را محاسبه کند، خروجی‌اش عدد ۶ است $(۱۱۰ = ۱۱ + ۱۰۱)$. برای این که ثابت کنیم دستگاه اشتباه کار می‌کند می‌خواهیم یک بازه را نشان دهیم که جمع اعداد آن با این دستگاه صفر شود. در این دنباله چند بازه داریم که جمع‌شان با این دستگاه صفر شود؟ به عبارت دیگر چند زوج i و j داریم که به ازای آن‌ها ماشین جواب صفر می‌دهد؟

۸ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۱۰ (۴) ۵ (۵)

یک جدول ۴×۴ را «خال خالی» می‌گوییم، اگر خانه‌های آن به صورت شطرنجی (یک در میان) با رنگ‌های سیاه و سفید رنگ شده باشند. دو خانه از یک جدول را مجاور می‌گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. منظور از یک قطر در یک جدول، هر قطری اعم از اصلی و فرعی است. به این ترتیب، هر یک از خانه‌های گوشه به تنهایی یک قطر هستند و یک جدول ۴×۴ ، ۱۴ قطر دارد. باب اسفنجی، آقای خرچنگ و اختاپوس هر کدام یک جدول ۴×۴ خال خالی دارند. باب اسفنجی در هر مرحله می‌تواند دو خانه‌ی مجاور از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ آن دو خانه را جابه‌جا کند. آقای خرچنگ در هر مرحله می‌تواند دو خانه‌ی مجاور از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ هر دو خانه را عوض کند (از سیاه به سفید و برعکس). اختاپوس نیز در هر مرحله می‌تواند یک قطر از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ تمام خانه‌های آن قطر را عوض کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

چند جدول ۴×۴ متفاوت وجود دارد که باب اسفنجی با تعدادی مرحله می‌تواند به آن‌ها برسد؟

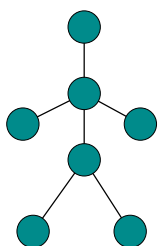
۲۸ (۱) ۲۱۵ (۲) ۲ (۱۶) (۳) ۴ (۱۶) (۴) ۵ (۱۶) (۵)

چند جدول ۴×۴ متفاوت وجود دارد که آقای خرچنگ با تعدادی مرحله می‌تواند به آن‌ها برسد؟

۲ (۱۶) (۱) ۲۱۶ (۲) ۳۸ (۳) ۴ (۱۶) (۴) ۵ (۲۱۵)

چند جدول ۴×۴ متفاوت وجود دارد که اختاپوس با تعدادی مرحله می‌تواند به آن‌ها برسد؟

۲۴ (۱) ۹ $\times$ ۲۱۲ (۲) ۲۱۲ (۳) ۴ (۲۱۴) ۵ (۲۱۶)



گراف G را به این شکل می‌سازیم: ابتدا به ازای هر یک از اعداد ۰ تا ۶۳ یک رأس در نظر می‌گیریم. سپس بین هر دو رأس که نمایش دودویی آن‌ها دقیقاً در یک بیت اختلاف دارد یک یال رسم می‌کنیم.

به هر زیرمجموعه‌ی ۷ تایی از رأس‌های G که دقیقاً شکل روبه‌رو را بسازند یک «آدمک» می‌گوییم. دقت کنید که بین رأس‌های یک آدمک نباید هیچ یالی غیر از یال‌های نشان داده‌شده در شکل مقابل در گراف G وجود داشته باشد.

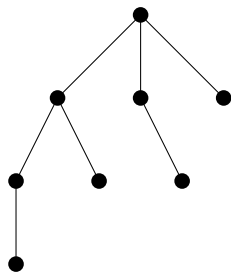
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۷ در گراف G چند آدمک می‌توان پیدا کرد؟

- ۹۶۰۰ (۱) ۳۸۴۰ (۲) ۵۷۶۰ (۳) ۴۶۰۸۰ (۴) ۶۰۰ (۵)

۲۸ عدد یک آدمک را برابر با XOR مقدار راس‌های آن در نظر می‌گیریم. مجموع اعداد تمام آدمک‌ها در گراف G چند است؟

- ۱۹۳۵۳۶۰ (۱) ۱۸۱۴۴۰ (۲) ۱۴۵۱۵۲۰ (۳) ۲۰۱۶ (۴) ۱۲۰۹۶۰ (۵)



باستان‌شناسان به تازگی روی سنگ‌های یک غار اشکالی از شجره‌نامه‌های یک قبیله‌ی باستانی یافته‌اند که نشان می‌دهد این قبیله در بچه‌دار شدن رسومات عجیبی داشته‌اند. در این قبیله اگر یک پدر k پسر داشته باشد، پسر بزرگ‌تر خانواده $k - 1$ پسر به دنیا می‌آورد، پسر دوم خانواده $k - 2$ پسر و همین‌طور تا پسر کوچک خانواده که هیچ پسری به دنیا نمی‌آورد و نباید پسر دار شود. در شکل روبه‌رو شجره‌نامه‌ی یک خاندان از این قبیله را می‌بینید که جد بزرگ آن‌ها دارای سه پسر بوده است. در این شکل پسران به ترتیب سن از چپ به راست قرار دارند (از بزرگ به کوچک). توجه داشته باشید که در این شجره‌نامه‌ها تنها اطلاعات مردان فامیل می‌آمده است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۹ در یکی از شجره‌نامه‌ها که روی سنگ‌ها یافت شده است، مشخص است که جد بزرگ خاندان ۱۰ پسر داشته است، اما اطلاعات مربوط به پسر سوم جد بزرگ بر اثر مرور زمان مخدوش شده است. با استفاده از اطلاعات فوق دانشمندان می‌خواهند بدانند تعداد مردان در خاندانی که جد بزرگش این پسر بوده، چند است؟

- ۵۰۴۰ (۱) ۸۴ (۲) ۴۰۳۲۰ (۳) ۱۲۸ (۴) ۲۵۶ (۵)

۳۰ فاصله‌ی فامیلی دو فرد در یک شجره‌نامه را طول مسیری که باید روی شجره‌نامه طی کرد تا از یک فرد به فرد دیگر رسید تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال فاصله‌ی فامیلی یک فرد با پدرش یک، با پدربزرگش دو و با عموی سه است. حال در یک خاندان که جد بزرگش ۱۰۰ پسر دارد، فاصله‌ی فامیلی چند جفت از افراد در این خاندان برابر با ۱۹۸ می‌باشد؟ (جفت‌های (a, b) و (b, a) در شمارش تفاوتی ندارند و یک بار شمرده می‌شوند).

- ۱۹۷ (۱) ۱۹۸ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۱۰۰ (۵)