

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سوال‌های ۲۵ تا ۳۰ در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ مجموعه‌ی اعداد $\{17, 24, 51, 69, 85, 31\}$ به ما داده شده است. حداقل چند عدد از این مجموعه را باید حذف کنیم تا میانگین اعداد باقی‌مانده برابر با ۴۲ شود؟

۲(۵)

۳(۴)

۵(۳)

۱(۲)

۴(۱)

۲ برای ساخت مدارهای الکترونیکی از گیت‌ها استفاده می‌شود. هر گیت تعدادی ورودی و تنها یک خروجی دارد. تمامی ورودی‌ها و خروجی یک گیت می‌توانند تتها یکی از دو مقدار صفر و یک را داشته باشند. گیت NAND که در شکل مقابل نشان داده شده است، یک گیت با دو ورودی و یک خروجی است. خروجی این گیت تنها موقعی صفر است که هر دو ورودی آن یک باشند، در غیر این صورت خروجی آن برابر یک می‌شود. با استفاده از گیت NAND مداری به شکل زیر طراحی کردہ‌ایم. به ازای چند حالت از ورودی‌های x, y و z مقدار خروجی r برابر صفر می‌شود؟ دقت کنید که در این مدار، خروجی گیت A ورودی گیت‌های B و C است.



۳(۵)

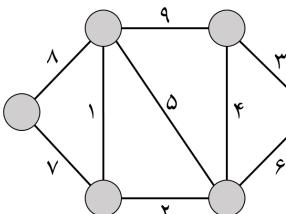
۲(۴)

۴(۳)

۵(۲)

۱(۱)

۳ استان دور (زادگاه فامیل دور) از ۶ شهر تشکیل شده است که همانند شکل مقابل با جاده‌های خاکی به هم متصل‌اند. هزینه‌ی آسفالت کردن هر جاده به صورت یک عدد صحیح کنار جاده نشان داده شده است. نامزد نمایندگی این استان و عده داده است که در صورت پیروزی در انتخابات، با آسفالت کردن تعدادی از این جاده‌ها کاری کند که بین هر دو شهر از این استان یک مسیر آسفالت (نه لزوماً مستقیم) به وجود آید. کمترین هزینه‌ای که این نامزد در صورت پیروزی در انتخابات برای تحقق وعده‌اش باید پیردازد چقدر است؟



۲۸(۵)

۱۷(۴)

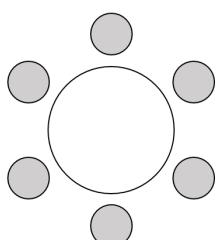
۲۱(۳)

۳۶(۲)

۲۶(۱)

۳

۴ یک خرابه به شکل مقابل شش جایگاه دارد. یک دزد در یکی از این جایگاه‌ها است. تیم امنیتی سلطان شامل تعدادی پلیس ماهر است. پلیس‌ها نمی‌دانند دزد کجا است و می‌خواهند او را دست‌گیر کنند. در ابتدای هر مرحله هر پلیس در یکی از جایگاه‌ها قرار می‌گیرد. اگر دزد در یکی از جایگاه‌هایی بود که پلیسی در آن قرار دارد، دست‌گیر می‌شود. در غیر این صورت پلیس‌ها از جایگاه‌ها خارج می‌شوند و دزد یکی از حرکات زیر را انجام می‌دهد:



- به جایگاه سمت راست خود می‌رود.
- به جایگاه سمت چپ خود می‌رود.
- به جایگاه رو به روی خود (با سه واحد فاصله) می‌رود.

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

سپس مجدداً پلیس‌ها در جایگاه‌ها (نه لزوماً جایگاه‌های مرحله‌ی قبل) قرار می‌گیرند و این مراحل تا یافتن دزد ادامه می‌یابد. با توجه به این نوع حرکات، تیم سلطان باید حداقل چند پلیس داشته باشد تا بتواند به طور تضمینی در تعداد محدودی مرحله دزد را دست‌گیر کند؟

۵(۵)

۳(۴)

۲(۳)

۱(۲)

۴(۱)

۵ همان سوال قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که دزد در هر مرحله یکی از حرکات زیر را انجام می‌دهد:

- یک واحد به سمت راست خود حرکت می‌کند.
- دو واحد به سمت چپ خود حرکت می‌کند.

در این صورت حداقل چند پلیس لازم است؟

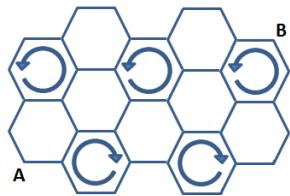
۱(۵)

۴(۴)

۲(۳)

۵(۲)

۳(۱)



۶ مورچه‌ای به کندوی زنبورها راه پیدا کرده است. او تنها می‌تواند روی مرز لانه‌ها حرکت کند. زنبورها از لانه‌هایی چرخان استفاده می‌کنند تا عسل آن‌ها شکرک نزنند! این لانه‌ها در هر ثانیه یک واحد در جهت مشخص شده می‌چرخند. مورچه یک ضلع را می‌تواند در یک ثانیه طی کند و همواره در ابتدای هر ثانیه تصمیم می‌گیرد که یا سر جای خود باشد، یا به سمت یکی از تقاطع‌های مجاور خودش حرکت کند و تا رسیدن به تقاطع تصمیم خود را تغییر نمی‌دهد (حتی اگر به علت چرخش جهت حرکتش تغییر کند). اگر مورچه در تقاطع A باشد، کمترین زمان لازم برای آن که به تقاطع B برسد چقدر است؟

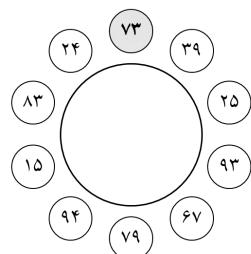
۸(۵)

۱۰(۴)

۷(۳)

۶(۲)

۱۱(۱)



۷ ده نفر دور یک میز نشسته‌اند. هر نفر مقداری پول دارد که به ما اطلاع نمی‌دهد. اما در عوض هر نفر از میزان پول دو نفر مجاور خود باخبر است و مجموع پول کنارستان خود را بلند اعلام می‌کند. در تصویر مقابل عددی که هر فرد اعلام کرده آمده است. در این صورت میزان پول نفری که بالای میز با رنگ خاکستری مشخص شده چقدر می‌تواند باشد؟

۲۴(۵)

۰(۴)

۲۵(۳)

۱۵(۲)

۱۷(۱)

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰
۲	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۳	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۴	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۵	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۰
۶	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰
۷	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰

۸ هفت کشور از جمله ایران برای میزبانی مسابقات جهانی المپیاد کامپیوتر در سال ۲۰۱۷ نامزد شده‌اند. برای انتخاب کشور میزبان، هیئت داوران در هر مرحله دو کشور از میان کشورهای باقی‌مانده را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کند و بر اساس نظر داوران، کشور بازنشده را از دور خارج می‌کند. این کار تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که تنها یک کشور باقی‌ماند. تنها کشور باقی‌مانده میزبان مسابقات خواهد شد. فرض کنید از قبل نظر هیئت داوران را به ازای هر دو کشور انتخاب شده می‌دانیم. نظر هیئت داوران در جدول مقابل آمده است. به ازای $j \leq i \leq 7$ عددی که در ردیف i ام و ستون j ام آمده است برابر ۱ باشد، کشور i برنده خواهد شد (یعنی نظر هیئت داوران با کشور i است). در غیر این صورت، کشور j برنده خواهد شد. جدول چند کشور شانس میزبانی را خواهند داشت؟

۵(۵)

۷(۴)

۱(۳)

۳(۲)

۶(۱)

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

فرض کنید a یک بیت دلخواه (۰ یا ۱) باشد. منظور از \bar{a} برابر با $a - 1$ است. حال فرض کنید یک رشته‌ای دودویی داریم. در هر مرحله می‌توان یکی از دو عمل زیر را انجام داد:

- یک بیت مانند b در رشته را در نظر بگیریم و در دو طرف آن \bar{b} بنویسیم. برای مثال از رشته‌ی $\langle 1, 0, 0, 1 \rangle$ و با انتخاب بیت وسط می‌توان به رشته‌ی $\langle 1, 0, 0, 1 \rangle$ رسید.
- دو بیت متوالی مانند ab را در نظر بگیریم و به جای آنها \bar{ab} بنویسیم. برای مثال از رشته‌ی $\langle 1, 0, 0, 1 \rangle$ و با انتخاب دو بیت سمت راست می‌توان به رشته‌ی $\langle 0, 0, 1, 1 \rangle$ رسید.

اگر ابتدا رشته‌ی دودویی $\langle 0 \rangle$ را داشته باشیم، با استفاده از دو عمل فوق نمایش دودویی چند عدد صحیح از ۲۱ تا ۲۶ را می‌توانیم بسازیم؟ توجه کنید که قرار گرفتن رقم‌های ۰ در ابتدای نمایش اشکال ندارد. برای مثال اگر به رشته‌ی $\langle 1, 0, 0, 1, 1, 0 \rangle$ برسیم، در واقع عدد ۱۳ را ساخته‌ایم.

۳(۵)

۴(۴)

۲(۳)

۰(۲)

۱(۱)

در شبکه‌ی 12×20 ماقبل ۲۰ ماشین در نقاط پررنگ قرار گرفته‌اند و می‌خواهند به نقاط توخالی روبروی خود بروند. ماشین‌های سمت راست جدول تنها به سمت چپ حرکت می‌کنند و ماشین‌های پایین جدول تنها به سمت بالا حرکت می‌کنند. سرعت هر ماشین یک متر بر ثانیه است و فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی مجاور در جدول یک متر است. می‌خواهیم به هر ماشین عددی طبیعی از ۱ تا k نسبت دهیم طوری که اگر هر ماشین در زمانی که به آن نسبت داده شده شروع به حرکت کند، بدون برخورد با ماشین دیگری به مقصد خود برسد. کوچک‌ترین عدد k که بتواند شرایط فوق را برآورده کند چقدر است؟

۴(۵)

۶(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

۱۰

مرتضی ۲ بسته‌ی پنج کیلویی، ۲ بسته‌ی چهار کیلویی و ۲ بسته‌ی سه کیلویی دارد (بسته‌ها متمایزند). او هم‌چنین سه کیسه‌ی یکسان دارد که گنجایش هر کدام ۱۰ کیلوگرم است. مرتضی به چند طریق می‌تواند بسته‌هایش را در این کیسه‌ها قرار دهد و به خانه ببرد؟

۱۵(۵)

۳۲(۴)

۴۸(۳)

۲۱(۲)

۶(۱)

۱۱

یک ماشین در اختیار داریم که هر رشته‌ی k تایی از صفر و یک مثل x_1, x_2, \dots, x_k را به یک رشته‌ی $(1-k)$ تایی به صورت $(x_k \oplus x_{k-1}, \dots, x_2 \oplus x_1, x_1)$ تبدیل می‌کند. (منظور از $x \oplus y$ عمل XOR دو عدد x و y است و مقدار آن تنها وقتی یک است که دقیقاً یکی از دو عدد x و y یک باشد). تعداد n های از ۱ تا ۱۳۹۲ را باید که برای هر رشته n تایی دلخواه مثل x_1, x_2, \dots, x_n اگر این رشته را به ماشین بدهیم و خروجی را باز به ماشین بدهیم و این کار را آن قدر تکرار کنیم تا در نهایت یک عدد مثل t به دست آید، آن‌گاه داشته باشیم:

$$t = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \dots \oplus x_n$$

۱۰۲۵(۵)

۱(۴)

۱۱(۳)

۱۰۲۴(۲)

۱(۱)

۱۲

در کلاسی ۲۰۰ دانش‌آموز وجود دارد. هر دانش‌آموز از این کلاس با دقیقاً یکی دیگر از دانش‌آموزان کلاس دوست است. رابطه‌ی دوستی دوطرفه است، یعنی اگر فرد a دوست فرد b باشد، آنگاه فرد b نیز دوست فرد a است. معلم این کلاس برای آشنا شدن با دانش‌آموزان خود هر بار دو نفر از دانش‌آموزان را انتخاب می‌کند و از آن‌ها می‌پرسد که آیا با یکدیگر دوست هستند یا خیر. معلم کلاس با حداقل چند سوال می‌تواند رابطه‌های دوستی در کلاس را به طور کامل کشف کند؟

۵۰۵۰(۵)

۱۹۹۰۰(۴)

۴۹۵۰(۳)

۹۹۰۰(۲)

۱۰۰۰۰(۱)

۱۳

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۴) یک جدول 4×4 داریم که ابتدا تمام خانه‌های آن سفید است. دو خانه را مجاور می‌گوییم، اگر در یک ضلع مشترک باشند. قلمرو هر خانه عبارت است از خود آن خانه و تمامی خانه‌های مجاورش. بنابراین قلمرو هر خانه شامل حداقل ۵ خانه است. در هر مرحله می‌توان تعدادی از خانه‌های قلمرو یک خانه را انتخاب کرد و رنگ آنها را تغییر داد (از سفید به سیاه و برعکس). در حداقل چند مرحله می‌توان تمام خانه‌های جدول را سیاه کرد؟

۳(۵) ۷(۴) ۵(۳) ۴(۲) ۶(۱)

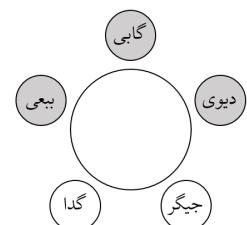
۱۵) سوال قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که این بار در هر مرحله می‌توان یک خانه انتخاب کرد و رنگ دقیقاً سه خانه از قلمرو آن را تغییر داد. در این صورت کمترین تعداد مراحل لازم برای سیاه کردن تمام خانه‌های جدول چقدر است؟

۴(۵) ۷(۴) ۶(۳) ۵(۲) ۸(۱)

۱۶) در بازی فوتبال اگر دو تیم به تساوی برسند، بازی به ضربات پنالتی کشیده می‌شود. هر تیم ۲ پنالتی می‌زند و تیمی که تعداد پنالتی بیشتری را گل کند، بازی را می‌برد. اگر در ضربات پنالتی نیز مساوی شدند، بازی به تک‌پنالتی کشیده می‌شود. یعنی هر تیم یک پنالتی می‌زند و اگر برنده مشخص شد که بازی تمام است و اگر نه دوباره تک‌پنالتی می‌زنند تا برنده مشخص شود. تیمهای ایران و آرژانتین مسابقه‌ی فوتبال برگزار کرده‌اند و بازی به ضربات پنالتی کشیده شده است. اگر بدآنیم هر پنالتی تیم ایران به احتمال $\frac{1}{3}$ و هر پنالتی تیم آرژانتین به احتمال $\frac{2}{3}$ گل می‌شود، به چه احتمالی تیم ایران برنده‌ی بازی خواهد بود؟

۴(۵) ۱(۴) ۲۵(۳) ۲۳(۲) ۱(۱)

۱۷) بیعی و گابی و دیوی و جیگر و گدا به شکل مقابل دور یک میز نشسته‌اند. صندلی‌های خاکستری، صندلی‌های «ویژه» هستند. در ابتدا گدا یک ریال دارد و بقیه هیچ پولی ندارند. در هر مرحله آفای مجری یکی از دو کار زیر را انجام می‌دهد:

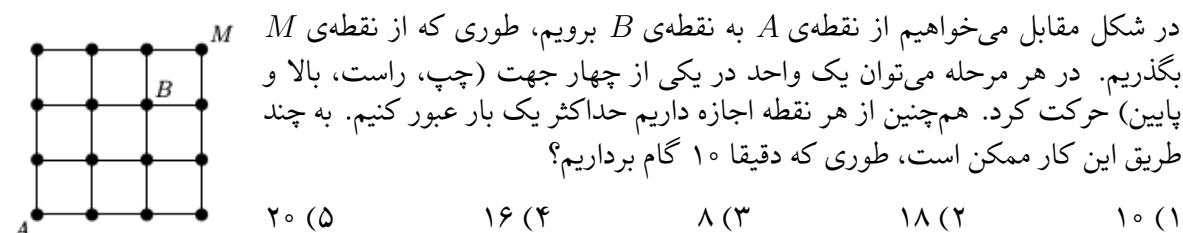


- هر کس را دو صندلی به سمت راست می‌برد. (توجه کنید که صندلی‌ها جای‌جا نمی‌شوند و فقط خود افراد جای‌جا می‌شوند).
- به هر کس که روی یک صندلی ویژه نشسته است، یک ریال می‌دهد.

آفای مجری قصد دارد کاری کند که پول همه‌ی افراد برابر k ریال شود. به ازای چند مقدار $5 \leq k \leq 2$ آفای مجری می‌تواند با تعدادی گام به این هدف برسد؟

۳(۵) ۴(۴) ۱(۳) ۰(۲) ۲(۱)

۱۸) در شکل مقابل می‌خواهیم از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برویم، طوری که از نقطه‌ی M بگذریم. در هر مرحله می‌توان یک واحد در یکی از چهار جهت (چپ، راست، بالا و پایین) حرکت کرد. هم‌چنین از هر نقطه اجازه داریم حداقل یک بار عبور کنیم. به چند طریق این کار ممکن است، طوری که دقیقاً ۱۰ گام برداریم؟



۱۹) محیا در حال طراحی یک بازی است. این بازی شامل تعدادی کارت است که روی هر یک از آنها سه عدد متمایز از مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۷ درج شده است. محیا می‌خواهد کارت‌ها را به نحوی بسازد که هر دو کارت متمایز دقیقاً یک عدد مشترک داشته باشند. در این صورت، او حداقل چند کارت متفاوت می‌تواند بسازد؟

۵(۵) ۳(۴) ۷(۳) ۲(۲) ۹(۱)

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۰ یک جدول 4×4 را در نظر بگیرید. دو خانه از این جدول را مجاور گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. فرض کنید از یک خانه‌ی این جدول شروع کنیم و در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور برویم، طوری که از هر خانه‌ی جدول دقیقاً یک بار عبور کنیم و در انتهای آغازین بازگردیم. به چنین حرکتی، دور همیلتونی می‌گوییم. به چند طریق می‌توان دو خانه از جدول را حذف کرد، طوری که خانه‌های باقی‌مانده‌ی جدول دور همیلتونی داشته باشند؟

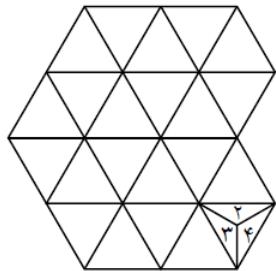
۳۲(۵)

۲۰(۴)

۲۴(۳)

۱۲(۲)

۱۶(۱)



۲۱ هرمی که اعداد ۱ تا ۴ روی وجهه آن نوشته شده است روی یک خانه از جدول مثلثی همانند شکل مقابل قرار گرفته است (روی وجهه زیرین عدد ۱ نوشته شده است). این هرم در هر حرکت می‌تواند به یکی از خانه‌هایی که با خانه‌ی فعلی هرم ضلع مشترک دارد برود. حرکت هرم به این صورت است که یال روی ضلع مشترک از زمین بلند نمی‌شود و هرم حول این ضلع مشترک دوران می‌کند و در خانه‌ی جدید می‌نشیند (روی وجهه دیگر مجاور آن یال). این هرم در هر خانه‌ی از جدول که قرار می‌گیرد شماره‌ی وجهه زیرین خود را در آن حک می‌کند (برای مثال در خانه‌ی اول عدد ۱ حک می‌شود). می‌خواهیم این هرم را طوری روی جدول حرکت دهیم که در هر خانه‌ی دقیقاً یک عدد حک شود. حداکثر مقدار مجموع اعداد حک شده چند می‌تواند باشد؟

۶۶(۵)

۵۶(۴)

۶۰(۳)

۶۴(۲)

۵۳(۱)

۲۲ شکل مقابل از تعدادی دایره و میله در صفحه ساخته شده است. می‌خواهیم هر یک از دایره‌های این شکل را با یکی از سه رنگ قرمز، آبی و سبز رنگ کنیم، طوری که هر دو دایره‌ای که با میله به هم وصل هستند، ناهمنگ باشند. به چند طریق این کار ممکن است؟ دو روش رنگ‌آمیزی را که با دوران شکل در صفحه به هم تبدیل می‌شوند، یکسان در نظر می‌گیریم.

۲۳ یک ساعت دیجیتال داریم که زمان را به صورت یک عدد دودویی با طول ثابت ۱۱ بیت نمایش می‌دهد که ۵ بیت سمت چپ آن نشان‌دهنده‌ی ساعت (بین ۰ تا ۲۳) و ۶ بیت سمت راست آن نشان‌دهنده‌ی دقیقه (بین ۰ تا ۵۹) است. به طور مثال این ساعت دیجیتال ساعت ۱۰:۲۱ دقیقه را به شکل ۱۰۱۰۰۱۰۱ نمایش می‌دهد. در طول یک شب‌نوروز، چند بار عددی که این ساعت نشان می‌دهد، آئینه‌ای می‌شود؟ به یک رشته آئینه‌ای می‌گوییم اگر با وارون خود برابر باشد. به طور مثال رشته‌ی ۱۰۱۰ آئینه‌ای است، ولی رشته‌ی ۱۱۰۰ آئینه‌ای نیست.

۶۰(۵)

۴۵(۴)

۴۸(۳)

۵۷(۲)

۴۳(۱)

۲۴ یک جدول 3×3 را در نظر بگیرید. می‌خواهیم چهار خانه‌ی a_1, a_2, a_3 و a_4 از خانه‌های این جدول را انتخاب کنیم، طوری که اگر از مرکز a_1 به مرکز a_2 ، سپس به مرکز a_3 و در انتهای به مرکز a_4 برویم، مسیری که ایجاد می‌شود خودش را قطع نکند و همچنین مرکز هیچ سه تا از چهار خانه‌ی انتخاب شده هم خط نباشد. به چند طریق این کار ممکن است؟

۱۱۲۰(۵)

۱۳۱۲(۴)

۲۰۱۶(۳)

۲۲۴۰(۲)

۱۲۸۰(۱)

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

بر روی صندلی‌های یک مترو افراد A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 در رده‌ی مقابله نشسته‌اند. طبق عادت همیشگی، هر کس به دلخواه به یکی از افراد روبروی خود زیرزیرکی نگاه می‌کند!

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

یک حالت را پایدار گوییم، اگر هیچ دو نفری نباشند که به یکدیگر نگاه کنند (چشم‌توجشم شوند!). چند حالت پایدار وجود دارد؟ ۲۵

۱۰۸ (۵) ۱۸ (۴) ۴۸ (۳) ۱۵۶ (۲) ۳۶ (۱)

زوج مرتب (z, i) را بی‌ربط گوییم، اگر A_i و B_z هیچ کدام دیگری را نگاه نکنند. به ترتیب حداقل و حداقل چند زوج بی‌ربط داریم؟ ۲۶

۳ (۵) ۳ (۴) و ۳ (۳) ۱ (۴) و ۳ (۲) ۱ (۱) و ۶ (۰)

می‌گوییم فرد X غیر مستقیم فرد Y را می‌بیند، اگر فردی مانند Z وجود داشته باشد که X, Z را نگاه کند و Z, Y را نگاه کند. چند زوج (X, Y) داریم که X به طور غیرمستقیم Y را نگاه کند؟ ۲۷

۵ (۵) ۸ (۴) ۱۲ (۳) ۴ (۲) ۶ (۱)

دستگاه عددساز در ابتدا عدد x را که برابر با صفر است نمایش می‌دهد. این دستگاه از ما یک دنباله از اعداد ۰ و ۱ می‌گیرد و طی مراحل زیر عدد x را تغییر می‌دهد:

با شروع از اولین عدد، به ازای هر عدد در دنباله:

- اگر عدد برابر با ۰ بود، x را ۴ برابر می‌کنیم.
- اگر عدد برابر با ۱ بود، x را برابر با $3 + x$ قرار می‌دهیم.

یک دنباله از ۰ و ۱ را «معتبر» می‌نامیم اگر در آن هیچ سه عدد متوالی برابر با ۱ نباشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

با استفاده از دستگاه عددساز و دنباله‌های معتبر به طول ۵ چند عدد مختلف می‌توان ساخت؟ ۲۸

۲۴ (۵) ۲۸ (۴) ۱۶ (۳) ۳۱ (۲) ۱۳ (۱)

با استفاده از دستگاه عددساز و دنباله‌های معتبر به طول ۱۰ چند عدد مختلف می‌توان ساخت؟ ۲۹

۲۸۸ (۵) ۲۷۴ (۴) ۹۲۷ (۳) ۱۷۸ (۲) ۵۰۴ (۱)

فرض کنید بتوانیم دنباله‌های معتبر به هر طول دلخواهی را به دستگاه عددساز بدهیم. چند عدد کوچکتر از ۴۸۰ می‌توانیم بسازیم؟ ۳۰

۲۲۴ (۵) ۲۴۹ (۴) ۸۱ (۳) ۲۰۴۷ (۲) ۲۴۳ (۱)