

مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

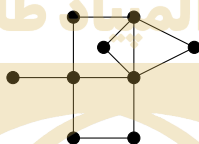
- سؤال‌های ۲۹ تا ۳۰ در دسته‌ی چندسؤالی آمده‌اند و توضیح دسته پیش از آن آمده است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ رقم i ام (از سمت راست) عدد X را با $f(X, i)$ نشان می‌دهیم. تمام اعداد ۷ رقمی با ارقام ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. به ازای هر عدد، مقدار $\sum_{i=1}^7 i \times f(X, i)$ را حساب کرده و این مقادیر را جمع می‌زنیم. حاصل چیست؟

۱۰۷۵۲ (۱) ۱۹۲ (۲) ۴۰۳۲ (۳) ۳۸۴ (۴) ۵۳۷۶ (۵)

۲ می‌خواهیم رئوس گراف زیر را با قرمز و آبی رنگ کنیم. باید طوری این کار انجام شود که هر رأس (چه قرمز و چه آبی) دست‌کم یک رأس قرمز مجاور داشته باشد. توجه کنید در یک گراف دو رأس را مجاور گوئیم، اگر با یک یال به هم وصل باشند. کمینه‌ی تعداد رأس‌های قرمز چیست؟

باشگاه المپیاد طلایی‌ها



۲ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

۳ دو عدد را هفتول گوئیم، اگر مجموع‌شان ۷ باشد. چند تاس با وجوه ۱، ۲، ...، ۶ داریم، طوری که وجه‌های هر دو عدد هفتول، مجاور باشند؟ توجه کنید دو تاس را که با چرخش و دوران در فضا به هم تبدیل می‌شوند، یک‌سان در نظر می‌گیریم.

۲۴ (۱) ۳۲ (۲) ۸ (۳) ۳۰ (۴) ۱۶ (۵)

۴ جدول زیر را در نظر بگیرید.

								B
A								

دو خانه را مجاور گوئیم، اگر دارای یک ضلع مشترک باشند. ایلچ در خانه‌ی A قرار دارد و می‌خواهد به خانه‌ی B برود. او در هر مرحله می‌تواند به یک خانه‌ی مجاور برود. حمید می‌خواهد تعدادی از خانه‌های جدول را با خاشاک پر کند تا ایلچ نتواند از آن خانه‌ها برای عبور استفاده کند. حمید باید طوری این کار را انجام دهد که دست کم یک مسیر از A به B برای ایلچ وجود داشته باشد. حمید دوست دارد تعداد خانه‌های کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای ایلچ، بیشینه شود. این مقدار بیشینه چیست؟ توجه کنید خود A و B هم جزء مسیر حساب می‌شوند.

۱۶ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۸ (۵)

۵ دور یک دایره، ۳۴ توپ چیده شده است که برخی از آن‌ها قرمز و بقیه آبی هستند. از هر پنج توپ متوالی، دست کم سه توپ رنگ قرمز دارند. بیشینه‌ی ممکن تعداد توپ‌های آبی چیست؟

۱۴ (۱) ۱۶ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۱۲ (۵)

مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۶ ۳۴ توپ متفاوت با شماره‌های ۱، ۲، ... و ۳۴ دور یک دایره قرار دارند. به چند طریق می‌توان ۱۷ تا از آن‌ها را قرمز و بقیه را آبی کرد، طوری که از هر ۱۲ توپ متوالی، دقیقاً ۶ توپ رنگ قرمز داشته باشند؟

(۱) ۲ (۲) ۴۰۹۶ (۳) ۱۰۲۴ (۴) ۱۶ (۵) ۶۴

۷ یک جدول 3×2 داریم. دو خانه را مجاور گوئیم، هر گاه یک ضلع مشترک داشته باشند. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۶ را در خانه‌های این جدول نوشت، طوری که به ازای هر خانه یکی از دو حالت زیر رخ بدهد؟

- عدد آن خانه از اعداد تمام خانه‌های مجاورش کوچک‌تر باشد.
- عدد آن خانه از اعداد تمام خانه‌های مجاورش بزرگ‌تر باشد.

(۱) ۸۸ (۲) ۲۴ (۳) ۴۰ (۴) ۸۰ (۵) ۹۶

۸ خط یک مترو اصفهان دارای ۱۱ ایستگاه با شماره‌های ۰، ۱، ... و ۱۰ است. مترو از ایستگاه ۰ شروع کرده و در ایستگاه ۱۰ کار خود را تمام می‌کند. در یک روز خلوت زمستانی، مترو بدون مسافر شروع به حرکت کرده است. در هر یک از ایستگاه‌های ۰، ۱، ... و ۹ دقیقاً یک مسافر جدید وارد مترو می‌شود. پس از رسیدن به هر ایستگاه (به جز ایستگاه پایانی)، هر نفر مستقل از بقیه به احتمال $\frac{1}{2}$ پیاده می‌شود. توجه کنید هیچ کس در همان ایستگاهی که سوار شده، پیاده نمی‌شود! امید ریاضی تعداد کسانی که به ایستگاه پایانی (۱۰) می‌رسند، چیست؟

(۱) $\frac{511}{256}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{1023}{512}$ (۵) ۴

۹ در دنیای سلطان افراد به سه دسته‌ی نوع ۰، نوع ۱ و نوع ۲ تقسیم می‌شوند! در این دنیا هر گاه فردی از دسته‌ی X بخواهد در جملاتش عددی مانند Y را بگوید، باقی‌مانده‌ی $X + Y$ را در تقسیم بر ۳ بیان می‌کند. برای مثال یک فرد از دسته‌ی ۱، جمله‌ی «۱۳۹۵» به علاوه‌ی ۵ می‌شود «۱۴۰۰» را به صورت «۱» به علاوه‌ی ۰ می‌شود «۰» بیان می‌کند! چهار نفر از این دنیا با نام‌های A, B, C, D جملات زیر را گفته‌اند:

- $A: C$ از دسته‌ی ۲ است.
- B : جمع شماره‌ی دسته‌ی C با شماره‌ی دسته‌ی من برابر ۲ است.
- C : جمع شماره‌ی دسته‌ی B با شماره‌ی دسته‌ی من برابر ۱ است.
- D : ضرب شماره‌ی دسته‌ی A با شماره‌ی دسته‌ی من برابر ۱ است.

دسته‌ی A چه چیزهایی می‌تواند باشد؟

(۱) ۰ (۲) ۰ و ۱ (۳) ۰ و ۲ (۴) در هیچ دسته‌ای نمی‌تواند باشد (۵) ۰ و ۱ و ۲

۱۰ یک جایگشت از اعداد ۱، ۲، ... و ۹ داریم. در هر مرحله می‌توان جایگشت را به دو تکه از عناصر متوالی تقسیم کرد و ترتیب عناصر هر تکه را وارون کرد. برای مثال، جایگشت $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ می‌تواند به جایگشت $(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2, 1)$ تبدیل شود. توجه کنید تکه‌ها می‌توانند تهی باشند. یک جایگشت را مطلوب گوئیم، اگر بتوان با شروع از آن و انجام چند مرحله، به جایگشت مرتب شده (از کوچک به بزرگ) رسید. چند جایگشت مطلوب داریم؟

(۱) ۷۲ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴۰ (۵) ۱۲۰

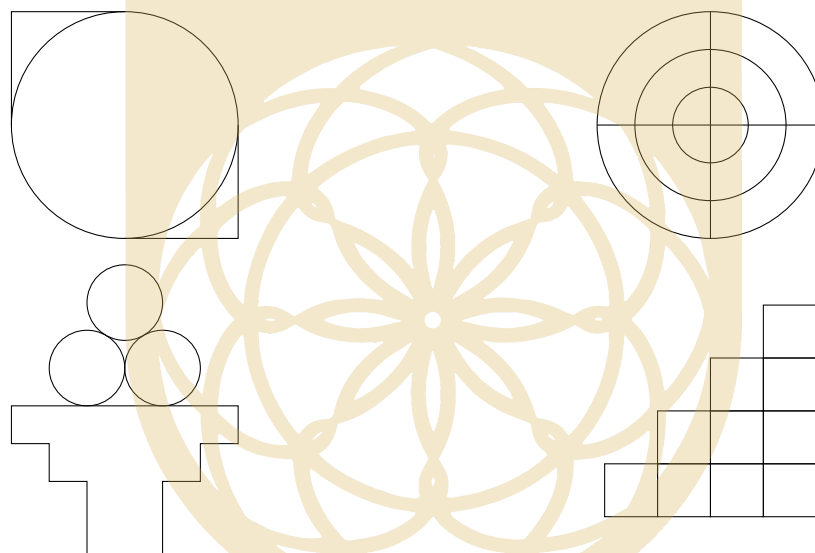
۱۱ در سوال قبل به ازای هر جایگشت مطلوب، کمینه‌ی تعداد مراحل لازم برای رسیدن به جایگشت مرتب شده (از کوچک به بزرگ) را در نظر بگیرید. در میان این مقادیر، بیشینه چیست؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۸ (۴) ۴ (۵) ۲

یک مربع با اضلاع موازی محورهای مختصات را **تفرقک** می‌نامیم. سلطان یک تفرقک در صفحه کشیده است. او در هر مرحله می‌تواند یکی از کارهای زیر را انجام دهد:

- یک تفرقک با خطوط کشیده شده انتخاب کند و دایره‌ای درون آن، مماس بر اضلاع تفرقک بکشد.
- یک دایره با خطوط کشیده شده انتخاب کند و تفریقی درون آن بکشد، طوری که هر چهار رأسش روی محیط دایره باشند.
- یک دایره با خطوط کشیده شده انتخاب کند و تفریقی دور آن بکشد، طوری که اضلاعش مماس بر دایره باشند.
- یک تفرقک با خطوط کشیده شده انتخاب کند و آن را پاک کند.
- یک دایره با خطوط کشیده شده انتخاب کند و آن را پاک کند.
- یک تفرقک با خطوط کشیده شده انتخاب کند و با کشیدن دو پاره‌خط عمودی و افقی، آن را به چهار تفرقک برابر تقسیم کند.

توجه کنید ممکن است با پاک کردن یک تفرقک، قسمتی از یک یا چند تفرقک دیگر نیز از بین برود. سلطان یک شکل را **ریسمانی** می‌گوید، هر گاه قابل ساختن از شکل اولیه (یک تفرقک) با تعدادی مرحله باشد. چند تا از چهار شکل زیر، ریسمانی هستند؟



۴ (۵)

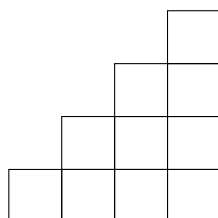
۰ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

شکل زیر را در نظر بگیرید:



به چند طریق می‌توان سه خانه را قرمز، سه خانه را سبز، سه خانه را زرد و یک خانه را آبی کرد، طوری که هیچ دو خانه‌ی هم‌رنگی هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند؟

۱۶ (۵)

۶ (۴)

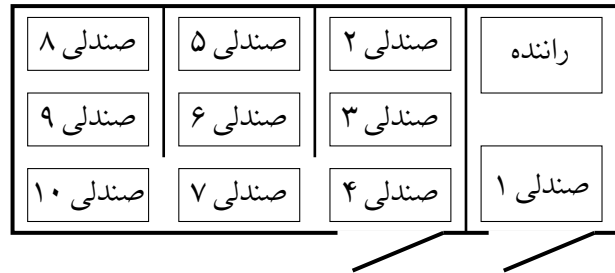
۳۰ (۳)

۲۴ (۲)

۱۲ (۱)

مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۴ «ون»، یک خودرو به شکل زیر با یک صندلی راننده و ۱۰ صندلی مسافر است که دو در دارد:



با توجه به محدودیت درها، هنگام پیاده شدن هر کس، باید صندلی‌های موجود در مسیر تا رسیدن به در خودرو، خالی باشد. برای مثال هنگام پیاده شدن مسافر صندلی ۵، اگر روی صندلی‌های ۴، ۶ و ۷ مسافری باشد، باید ابتدا این مسافری پیاده شوند تا مسافر صندلی ۵ بتواند از خودرو خارج شود. توجه کنید خطوط سیاه پررنگ شکل، مانع هستند و مسافران نمی‌توانند از آن‌ها رد شوند. قرار است این ون در طول یک جاده‌ی مستقیم حرکت کند. ۱۰ مسافر می‌خواهند در ۱۰ جای مختلف از این جاده پیاده شوند. به چند طریق این ۱۰ نفر در ابتدای مسیر می‌توانند روی صندلی‌ها بنشینند، طوری که هنگام پیاده شدن هیچ کسی، فرد دیگری مجبور به پیاده شدن نباشد؟

(۱) ۳۶۰۰ (۲) ۲۸۰۰ (۳) ۵۶۰۰ (۴) ۵۱۴۰ (۵) ۵۶۰

۱۵ جدولی 3×3 داریم که ۹ شیء مختلف در خانه‌های آن قرار گرفته‌اند. در هر مرحله می‌توان یکی از دو کار زیر را انجام داد:

- یک خانه‌ی گوشه را در نظر بگیریم و شیء آن را با شیء یکی از دو خانه‌ی مجاورش جابه‌جا کنیم.
- سطر وسط یا ستون وسط را در نظر بگیریم و ترتیب اشیاء در آن را وارون کنیم.

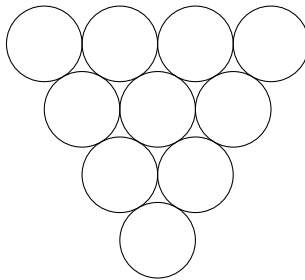
یک جدول را **سلطانی** گوییم، اگر بتوان آن را با دقتن ۱۳۹۵ مرحله ساخت. چند جدول سلطانی مختلف داریم؟

(۱) $4!4!2!2!$ (۲) $8!$ (۳) $\frac{8!}{2}$ (۴) $\frac{8!}{3!}$ (۵) $9!$

۱۶ جایگشتی تصادفی از اعداد ۱، ۲، ... و ۱۰۰ داریم. به چه احتمالی تعداد اعداد بین ۱ و ۲ زوج است؟

(۱) $\frac{50}{99}$ (۲) $\frac{49}{99}$ (۳) $\frac{49}{100}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۵) $\frac{51}{100}$

۱۷ در چهار دایره‌ی بالای شکل زیر، چهار عدد طبیعی متمایز کم‌تر از ۱۱ می‌نویسیم. عدد هر دایره‌ی دیگر برابر با قدر مطلق تفاضل دو دایره‌ی بالایی خود است. بیشینه‌ی عدد پایین‌ترین دایره چیست؟



(۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۹ (۵) ۸

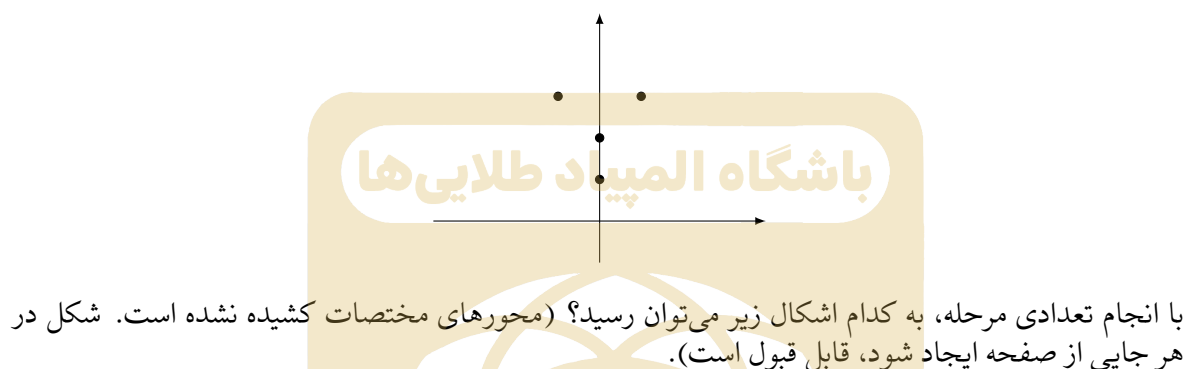
در ابتدا یک مهره روی نقطه‌ی $(0, 0)$ صفحه‌ی مختصات قرار داده شده است. در هر مرحله می‌توان یک مهره با مختصات (x, y) به همراه یک عدد طبیعی n انتخاب کرده و پس از برداشتن مهره‌ی مذکور، در هر یک از نقطه‌های

$$(x, y + 1), (x, y + 2), \dots, (x, y + n - 1)$$

و همچنین نقطه‌های

$$(x - 1, y + n), (x + 1, y + n)$$

یک مهره قرار داد. گام‌ها باید طوری انجام شود که در هر لحظه در هر نقطه حداکثر یک مهره باشد. برای مثال در گام نخست با انتخاب تنها مهره‌ی موجود و $n = 3$ ، صفحه به شکل زیر در می‌آید:



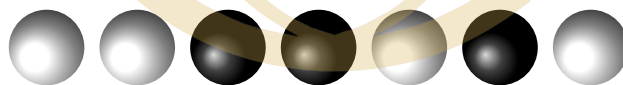
شکل ۳

شکل ۲

شکل ۱

(۱) شکل ۲ (۲) هر سه شکل (۳) شکل ۱ (۴) شکل‌های ۱ و ۳ (۵) هیچ یک از شکل‌ها

هفت مهره‌ی سیاه و سفید به ترتیب زیر در یک ردیف قرار دارند:



مرتضی و ابوالفضل با هم بازی می‌کنند. هر کس در نوبت‌ش یکی از مهره‌های کناری ردیف را برای خود برمی‌دارد. هر دو نفر دوست دارند مهره‌های سیاه بیشتری در انتها داشته باشند. ابوالفضل بازی را آغاز می‌کند. پس از هفت مرحله بازی تمام می‌شود و ابوالفضل چهار مهره و مرتضی سه مهره خواهد داشت. اگر هر دو نفر به به‌ترین شکل ممکن بازی کنند، در انتها ابوالفضل چند مهره‌ی سفید خواهد داشت؟

۲ (۵)

۱ (۴)

۳ (۳)

۰ (۲)

۴ (۱)

یک جدول 3×3 داریم. دو خانه را مجاور گوئیم، هر گاه یک ضلع مشترک داشته باشند. می‌خواهیم در هر یک از خانه‌های جدول، یکی از اعداد ۱، ۲ و ۳ را بنویسیم، طوری که عدد هر خانه برابر با تعداد اعداد ۱ در خانه‌های مجاورش باشد. خانه‌ی مرکزی چه اعدادی می‌تواند داشته باشد؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) هر سه عدد (۴) ۲ و ۳ (۵) هیچ یک از سه عدد نمی‌توانند در خانه‌ی وسط باشند

مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۱ یک جدول ۵×۴ داریم در هر یک از خانه‌های آن عدد ۰ نوشته شده است. ایلچ الگوریتم زیر را انجام می‌دهد:

۱. به ازای هر سطر از بالا به پایین انجام بده:

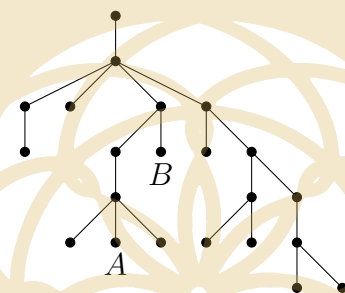
۱-۱. به ازای هر ستون از چپ به راست انجام بده:

۱-۱-۱. خانه‌ی واقع در سطر و ستون گفته شده را در نظر بگیر. سطر یا ستون آن را انتخاب کن و تمام خانه‌های سطر یا ستون انتخاب شده را برعکس کن (از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰).

از میان تمام $۲^{۲۰}$ حالت برای انتخاب سطرها و ستون‌ها توسط ایلچ، در چند حالت پس از اجرای الگوریتم به جدولی می‌رسیم که تمام خانه‌های آن عدد ۱ دارند؟

۴۰۹۶ (۱) ۵۱۲ (۲) ۰ (۳) ۸۱۹۲ (۴) ۲۵۶ (۵)

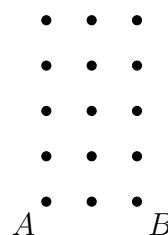
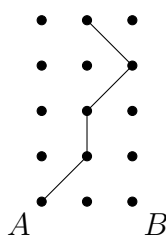
۲۲ درخت زیر را در نظر بگیرید. یک یال را زرد می‌نامیم، اگر به یک رأس درجه‌ی ۱ وصل باشد. یک رأس را شل می‌نامیم، اگر دست کم دو یال زرد به رؤس مسیر آن به ریشه (رأس بالا) وصل باشند (به جز یال خود رأس و یال متصل به ریشه). برای مثال A در ابتدا شل است، زیرا ۴ یال زرد به رؤس مسیر آن تا ریشه وصل هستند؛ اما رأس B در ابتدا شل نیست.



در هر مرحله می‌توان یک رأس شل در نظر گرفته و از درخت حذف کرد. توجه کنید ممکن است رأسی در ابتدا شل نباشد، اما پس از تعدادی مرحله شل شود. حداکثر چند رأس می‌توان از درخت حذف کرد؟

۱۳ (۱) ۷ (۲) ۱۶ (۳) ۹ (۴) ۱۰ (۵)

۲۳ شکل سمت راست را در نظر بگیرید:



سلطان از نقطه‌ی A شروع به کشیدن یک خط شکسته می‌کند. او در هر مرحله نقطه‌ی کنونی را در نظر گرفته و با کشیدن یک پاره‌خط، به یکی از نقاط بالا، بالا-راست یا بالا-چپ (در صورت وجود) می‌رود. پس از چهار مرحله، او به یکی از نقاط بالایی شکل می‌رسد. برای مثال سلطان می‌تواند مسیرش را مانند شکل سمت چپ بکشد. سپس ایلچ مسیری دیگر با شروع از نقطه‌ی B رسم می‌کند. به چند طریق این کار ممکن است، طوری که دو مسیر کشیده شده در هیچ جایی (چه روی نقاط شکل و چه جای دیگر) یک‌دیگر را قطع نکنند؟

۲۷ (۱) ۸۱ (۲) ۵۵ (۳) ۹۶ (۴) ۱۳ (۵)

۲۴ پس از اجرای الگوریتم زیر، مقدار S چه خواهد بود؟

۱ S را برابر ۰ قرار بده.

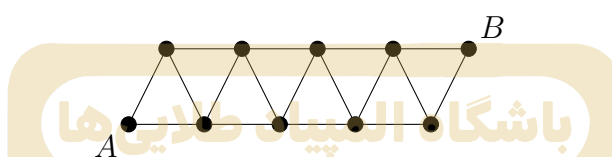
۲ به ازای i از ۰ تا ۳۱ انجام بده:

۱-۲. به ازای j از ۰ تا ۳۱ انجام بده:

۱-۲-۱. اگر $(i \text{ XOR } j)$ از i بزرگ‌تر شد، S را یک واحد زیاد کن.

۸۳ (۱) ۴۵۱ (۲) ۹۹۲ (۳) ۴۹۶ (۴) ۳۴۱ (۵)

۲۵ گراف زیر چند مسیر از A به B دارد؟ توجه کنید یک مسیر نمی‌تواند رأس یا یال تکراری داشته باشد.



۶۸ (۱) ۸۱ (۲) ۱۴۹ (۳) ۴۴ (۴) ۲۷۴ (۵)

۲۶ کیوان و پیمان به نوبت با هم بازی می‌کنند. آن‌ها در ابتدا یک کیسه شامل n سنگ‌ریزه دارند. بازی را کیوان شروع می‌کند. کیوان در هر نوبت‌ش می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ سنگ‌ریزه از کیسه خارج کند، در حالی که پیمان در هر نوبت‌ش می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ سنگ‌ریزه بردارد. برنده‌ی بازی کسی است که آخرین سنگ‌ریزه را از کیسه خارج کند. اگر هر دو نفر به صورت بهینه بازی کنند، به ازای $n = 10$ ، $n = 1395$ و $n = 2016$ به ترتیب چه کسی بازی را می‌برد؟

(۱) کیوان، کیوان، کیوان (۲) پیمان، کیوان، پیمان (۳) پیمان، پیمان، پیمان (۴) پیمان، پیمان، کیوان (۵) کیوان، پیمان، کیوان

۲۷ یک گراف کامل 11 رأسی با رأس‌های $0, 1, \dots, 10$ داریم. روی یال بین رأس‌های i و j مقدار باقی‌مانده‌ی $i + j$ در تقسیم بر 11 را نوشته‌ایم. می‌خواهیم یک زیردرخت فراگیر از این گراف انتخاب کنیم، طوری که مجموع اعداد یال‌های آن کمینه باشد. این مقدار کمینه چیست؟

۱۰ (۱) ۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۱ (۴) ۶ (۵)

۲۸ مرتضی یک جدول 8×8 را با دومینو (کاشی‌های 1×2) پوشانده و از هر دومینو یک خانه را سیاه و یک خانه را سفید کرده است. گویم دو خانه‌ی سیاه A و B دوست هستند، هر گاه بتوان از A شروع کرده، در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور (مشترک در ضلع) سیاه رفته و پس از تعدادی مرحله به B رسید. مجموعه‌ای از خانه‌های سیاه را دیدنی گویم، هر گاه هر دو خانه‌ی مجموعه، دوست باشند. بیشینه‌ی ممکن تعداد خانه‌های یک مجموعه‌ی دیدنی چیست؟

۳۲ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴) ۸ (۵)

در منطقه‌ای در نزدیکی شهر لندن، قتلی توسط سه نفر اتفاق افتاده است. سلطان به سرعت وارد عمل شد و پنج متهم (A, B, C, D, E) را دست‌گیر کرد. هر یک از آن‌ها ادعا کرد که قاتل نیست، ولی نام دو نفر از چهار نفر دیگر را به عنوان کسانی که به احتمال زیاد قاتل هستند، به زبان آورد. سلطان متوجه شد که هر یک از قاتل‌ها

برای رد گم کردن، نام دقیقن یک قاتل دیگر را بر زبان آورده است و هر یک از بی‌گناهان نیز نام دو قاتل را گفته است. در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید سلطان چند نفر را به طور قطع می‌تواند قاتل معرفی کند؟

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۹ اظهارات:

- $A : B$ و C قاتل هستند.
- $A : B$ و C قاتل هستند.
- $B : C$ و E قاتل هستند.
- $D : E$ و C قاتل هستند.
- $E : B$ و D قاتل هستند.

۱ (۱) ۲ (چنین چیزی ممکن نیست) ۳ (۲) ۴ (۰) ۵ (۳)

باشگاه المپیاد طلایی‌ها

۳۰ اظهارات:

- $A : B$ و C قاتل هستند.
- $A : B$ و C قاتل هستند.
- $B : C$ و A قاتل هستند.
- $D : E$ و B قاتل هستند.
- $E : C$ و D قاتل هستند.

۱ (۳) ۲ (چنین چیزی ممکن نیست) ۳ (۰) ۴ (۱) ۵ (۲)

