

مرحله‌ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون 180° دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۲۳ تا ۳۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

سلطان، ایلیچ و دو مسافر دیگر می‌خواهند سوار یک تاکسی شوند. سلطان با ایلیچ قهر کرده و نمی‌خواهد کنار او بنشیند. این چهار مسافر به چند طریق می‌توانند در صندلی‌های تاکسی (یک نفر در جلو و سه نفر عقب) بنشینند، طوری که سلطان کنار ایلیچ نباشد؟

۱۶(۵)

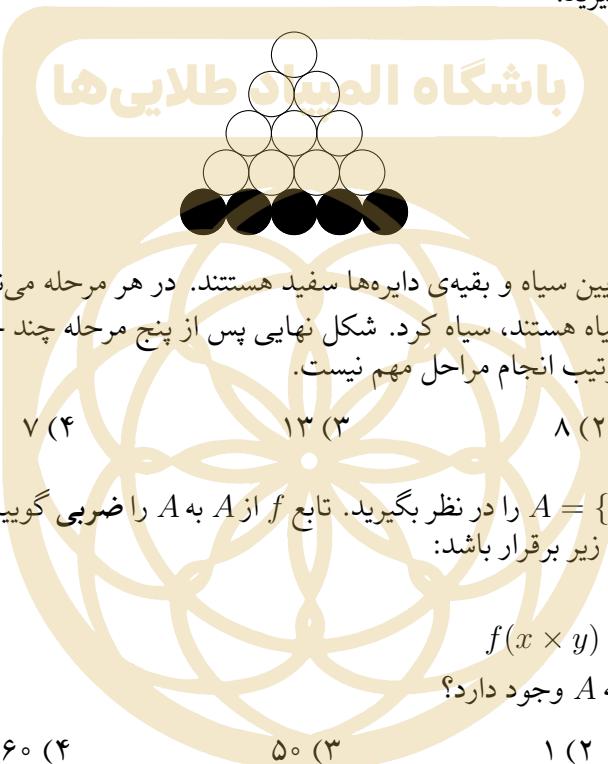
۲۴(۴)

۱۲(۳)

۸(۲)

۶(۱)

۲ دایره‌های زیر را در نظر بگیرید:



ابتدا پنج دایره‌ی ردیف پایین سیاه و بقیه‌ی دایره‌ها سفید هستند. در هر مرحله می‌توان یک دایره‌ی سفید را که هر دو دایره‌ی زیرین آن سیاه هستند، سیاه کرد. شکل نهایی پس از پنج مرحله چند حالت دارد؟ توجه کنید فقط شکل نهایی مهم بوده و ترتیب انجام مراحل مهم نیست.

۱۱(۵)

۷(۴)

۱۳(۳)

۸(۲)

۵(۱)

۳ مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5\} = A$ را در نظر بگیرید. تابع f از A به A را ضربی گوییم، اگر به ازای هر $x, y \in A$ دست کم یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

$$x \times y > 5 \quad \bullet$$

$$f(x \times y) = f(x) \times f(y) \quad \bullet$$

چند تابع ضربی f از A به A وجود دارد؟

۲(۵)

۶۰(۴)

۵۰(۳)

۱(۲)

۲۵(۱)

۴ عدد متمایز در اختیار داریم. یک بار این اعداد را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم تا دنباله‌ی $\langle a_1, \dots, a_{10} \rangle$ به دست آید. بار دیگر اعداد را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم تا دنباله‌ی $\langle b_1, \dots, b_{10} \rangle$ ساخته شود. برای هر $1 \leq i \leq 10$ فرض کنید $\{a_1, \dots, a_i\} = A_i$ و $\{b_1, \dots, b_i\} = B_i$ باشد. در بین 100 مجموعه به فرم $A_i \cup B_j$ که $i, j \leq 10$ چند مجموعه متمایز وجود دارد؟

۵۵(۵)

۴۵(۴)

۳۷(۳)

۳۶(۲)

۴۶(۱)

۵ پنج نفر دور یک دایره هستند. در یک لحظه به طور همزمان هر کس دستش را به سمت یکی از دو نفر مجاور دراز می‌کند. دو نفر که دستشان را به سمت هم دراز کرده‌اند با هم دست می‌دهند. به طور میانگین در میان حالات مختلف چند عمل دست دادن انجام می‌شود؟

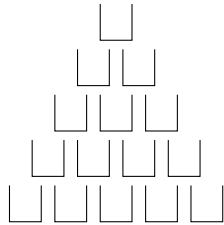
 $\frac{1}{2}(5)$ $\frac{5}{4}(4)$ $\frac{2}{3}(3)$

۱(۲)

 $\frac{3}{2}(1)$

مرحله‌ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۶ شکل زیر، نمایی از تعدادی لیوان است:



ظرفیت هر لیوان یک لیتر است. با شروع از لحظه‌ی صفر، پارسا به طور پیوسته به میزان یک لیتر بر ثانیه در لیوان بالایی آب می‌ریزد. اگر یک لیوان پر شود، آب از دو طرف آن به طور مساوی سرریز می‌کند. جاذبه را بسیار زیاد در نظر بگیرید و فرض کنید اگر آب سرریز شود، به سرعت به لیوان پایینی منتقل می‌شود. فرض کنید t ، نخستین لحظه‌ای بر حسب ثانیه باشد که به یکی از لیوان‌های ردیف پایین قطره‌ای از آب برسد. نزدیک‌ترین عدد صحیح به t چیست؟

۷(۵)

باشگاه المپیاد طلایی ها

۹(۱)

به هر رقم در مبنای دو (۰ یا ۱) یک بیت گفته می‌شود. عمل \otimes بین دو بیت به صورت زیر انجام می‌شود:

$$0 \otimes 0 = 0 \quad 0 \otimes 1 = 0 \quad 1 \otimes 0 = 0 \quad 1 \otimes 1 = 1$$

برای انجام عمل \otimes بین دو عدد، ابتدا آن دو عدد را در مبنای دو می‌نویسیم. اگر تعداد ارقام دو عدد برابر نبود، آنقدر سمت چپ عدد کوچک‌تر رقم ۰ می‌گذاریم تا تعداد ارقام‌شان برابر شود. در انتها بیت به بیت عمل \otimes را انجام می‌دهیم. برای مثال:

$$14 \otimes 5 = 4$$

زیرا:

$$1110 \otimes 0101 = 0100$$

تعداد زوج‌های مرتب (a, b) را از اعداد صحیح بیابید که $a, b < 64$ و $a \otimes b = a, b \leqslant 64$ باشد.

۷۲۹(۵)

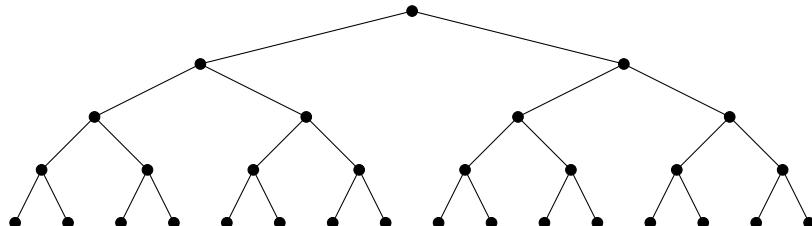
۲۴۳(۴)

۵۱۱(۳)

۲۵۶(۲)

۵۱۲(۱)

۸ نقشه‌ی یک موزه به شکل زیر است:



هر یک از نقاط پایینی یک در ورودی هستند و یک گنج در رأس بالا قرار دارد. دو نقطه که با پاره خط به هم وصل هستند، به هم راه مستقیم دارند. ایلیچ می‌تواند از یک در ورودی وارد شده و با حرکت در موزه به گنج برسد. برای سرعت دادن به کار، ایلیچ از هر نقطه حداکثر یک بار عبور می‌کند. به چند طریق می‌توان در نقاط شکل دوربین قرار داد، طوری که ایلیچ از هر مسیری که به گنج برسد، توسط دقیقاً یک دوربین دیده شود؟

۶۴(۵)

۱۰۲۴(۴)

۶۷۷(۳)

۲۶(۲)

۶۲۶(۱)

مرحله‌ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۹

در ابتدا دو جعبه‌ی خالی به نامهای A و B و چهار توب با شماره‌های ۱ تا ۴ داریم. برای هر i به ترتیب از ۱ تا ۴ در مرحله‌ی i اُم توب شماره i را به احتمال $\frac{a+1}{i+1}$ در جعبه‌ی A و به احتمال $\frac{b+1}{i+1}$ در جعبه‌ی B می‌اندازیم که a و b به ترتیب تعداد توب‌های جعبه‌های A و B قبل از انجام مرحله‌ی i اُم هستند. احتمال این را بیابید که در انتهای مرحله‌ی ۴ هر جعبه دست کم یک توب باشد.

۵(۵)

۴(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

۱۰

گرافی ۱۰۰۰ رأسی با رأس‌های ۱ تا ۱۰۰۰ در نظر بگیرید. برای هر $1 \leq i < j \leq 1000$ ، بین دو رأس i و j یال قرار می‌دهیم، اگر و تنها اگر i امین رقم نمایش دودویی عدد j (از سمت راست) برابر ۱ باشد. کوچکترین k را بیابید که بتوان با k رنگ رأس‌های این گراف را رنگ‌آمیزی کرد، طوری که هر دو رأس مجاور ناهم‌رنگ باشند.

۴(۵)

۵(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۶(۱)

۱۱

در خانه‌ی پایین-چپ جدول زیر، یک لاکپشت قرار دارد و می‌خواهد به خانه‌ی بالا-راست برسد. روی هر خانه، ارتفاع آن نوشته شده است. لاکپشت در هر مرحله می‌تواند یک واحد به راست یا بالا برود و در هر گام، به اندازه‌ی اختلاف ارتفاع دو خانه خسته می‌شود (حتی اگر ارتفاع کم شود). کمینه‌ی مجموع میزان خستگی در مسیر چیست؟

۷۰۰	۱۴۰	۳۰۰	۱۳۰	۲۰۰
۹۰۰	۱۱۰	۵۰۰	۸۰۰	۵۰۰
۱۰۰	۴۰۰	۱۶۰	۶۰۰	۸۰۰
۸۰۰	۳۰۰	۱۲۰	۱۰۰	۲۰۰
۰	۷۰۰	۲۰۰	۷۰۰	۹۰۰

۳۲۰۰(۵)

۱۹۲۰(۴)

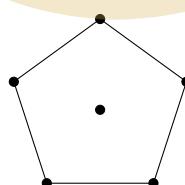
۲۳۱۰(۳)

۳۸۰۰(۲)

۲۰۰۰(۱)

۱۲

شكل زیر یک پنج‌ضلعی منتظم به همراه یک نقطه در مرکز آن است:



می‌خواهیم بین برخی از شش نقطه‌ی شکل، پاره‌خط‌هایی بکشیم، طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- هیچ دو پاره‌خطی هم‌دیگر را قطع نکنند (مگر در خود نقاط شکل).

• سطح داخل شکل به تعدادی مثلث افزای شود، طوری که هر کدام از نقاط شکل، رأس حداقل یکی از مثلث‌ها باشند.

شكل نهایی چند حالت دارد؟

۵(۵)

۱(۴)

۱۲(۳)

۱۱(۲)

۱۰(۱)

مرحله‌ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۳

به یک مجموعه از اعداد شکننده گوییم، اگر بتوان اعداد آن را به دو مجموعه افراز کرد، طوری که مجموع اعداد آن‌ها برابر باشد. چند تا از مجموعه‌های زیر شکننده هستند؟

$$A = \{1, 2, \dots, 100\} \quad B = \{2, 4, \dots, 100\} \quad C = \{1, 3, \dots, 99\} \quad D = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{100}\right\}$$

۳(۵)

۰(۴)

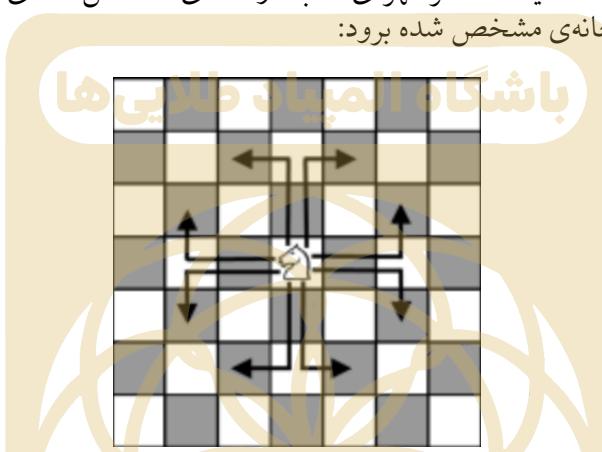
۴(۳)

۲(۲)

۱(۱)

۱۴

یک صفحه شطرنج نامتناهی داریم. برخی از خانه‌های این صفحه امن هستند. در هر خانه از صفحه یک عدد می‌نویسیم که برابر با حداقل تعداد حرکاتی است که یک مهره‌ی اسب باید انجام دهد تا از آن خانه به یک خانه امن برسد. برای مثال روی خانه‌های امن، عدد صفر نوشته شده است. برای کسانی که با شطرنج آشنا نیستند، اگر مهره‌ی اسب در خانه‌ی مشخص شده‌ی شکل زیر باشد، در یک گام می‌تواند به یکی از هشت خانه‌ی مشخص شده برود:



فرض کنید A و B دو خانه‌ی مجاور (دارای یک ضلع مشترک) باشند که عدد خانه‌ی A برابر ۵۷ است. کدامیک نمی‌تواند عدد خانه‌ی B باشد؟

۵۳(۵)

۶۰(۴)

۵۶(۳)

۵۵(۲)

۵۷(۱)

۱۵

یک مکعب $a \times b \times c$ موازی محورهای مختصات داریم و می‌خواهیم آن را به طور کامل با آجرهای $1 \times 1 \times 1$ پر کنیم. آجرها نمی‌توانند از مکعب بیرون بزنند. به آجرهای موازی محور x , آجر نوع X گوییم. به همین ترتیب آجرهای نوع Y و نوع Z را تعریف می‌کنیم. به ازای چند تا از حالات زیر برای ابعاد مکعب می‌توان این کار را انجام داد، طوری که تعداد آجرهای هر سه نوع برابر باشد؟

$$6 \times 7 \times 7 \quad 6 \times 6 \times 7 \quad 5 \times 6 \times 7 \quad 5 \times 7 \times 8$$

۰(۵)

۳(۴)

۲(۳)

۱(۲)

۴(۱)

۱۶

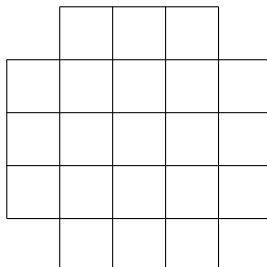
تعدادی کیسه دور یک دایره هستند که در مجموع ۱۰۰ سنگ‌ریزه دارند. در هر دقیقه به طور همزمان، از هر کیسه که دست کم دو سنگ‌ریزه دارد، یک سنگ‌ریزه به هر یک از دو کیسه‌ی مجاور منتقل می‌شود. اگر پس از یک مرحله تعداد سنگ‌ریزه‌های هیچ کیسه‌ای تغییر نکند، کار متوقف می‌شود. حداقل چند دقیقه باید صبر کنیم تا مطمئن باشیم کار متوقف شده است؟

(۱) ۶۶(۱) (۲) ۵۰(۲) (۳) ۳۳(۳) (۴) ۱۰۰(۴) (۵) ممکن است عملیات هیچ گاه متوقف نشود

مرحله‌ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۷

شکل زیر، یک جدول 5×5 با حذف چهار گوشه‌ی آن است. می‌خواهیم این شکل را به طور کامل با کاشی‌های 1×1 ، 2×2 و 3×3 پوشانیم، طوری که کاشی‌ها روی هم قرار نگرفته و از جدول بیرون نزنند. نیازی نیست از هر سه نوع کاشی استفاده کنیم. حداقل تعداد کاشی‌ها برای انجام این کار چیست؟



۱۲(۵)

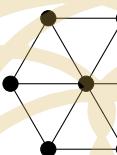
۱۳(۴)

۱۰(۳)

۹(۲)

۱۱(۱)

می‌خواهیم روی هفت نقطه‌ی شکل زیر، اعداد ۱ تا ۷ را بنویسیم (هر کدام از اعداد دقیقاً روی یک نقطه و هر نقطه شامل دقیقاً یک عدد باشد):



به یک مثلث ایده‌آل گوییم، اگر با خواندن اعداد مثلث به ترتیب ساعت گرد از کوچک‌ترین عدد، دنباله‌ای صعودی به دست آید. برای مثال در شکل زیر مثلث سمت چپ ایده‌آل است، اما مثلث سمت راست ایده‌آل نیست:



پس از عدده‌گذاری شکل گفته شده، حداقل چند مثلث از شش مثلث موجود ایده‌آل خواهند بود؟

۲(۵)

۴(۴)

۶(۳)

۳(۲)

۵(۱)

جدول زیر را در نظر بگیرید:

●				

در خانه‌ی پایین-چپ جدول یک مهره قرار دارد. دو خانه از جدول را همسایه گوییم، اگر یک ضلع یا یک رأس مشترک داشته باشند. به چند طریق می‌توان از وضعیت مشخص شده در شکل آغاز کرده، در هر مرحله مهره را به یک خانه‌ی همسایه ببریم، از هر خانه دقیقاً یک بار عبور کنیم و به خانه‌ی آغازین برگردیم؟

۱۸(۵)

۳۲(۴)

۲۴(۳)

۱۶(۲)

۷۲(۱)

مرحله‌ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۰

در سوال قبل، به چند طریق می‌توانیم مهره را از خانه‌ی پایین-چپ به خانه‌ی بالا-راست برسانیم، طوری که از هر خانه حداکثر یک بار عبور کنیم؟

۴۸۰ (۵)

۵۶۰ (۴)

۴۶۴ (۳)

۱۰۰ (۲)

۱۱۶ (۱)

۲۱

حافظه‌ی سلطان ۲۰ خانه با شماره‌های ۱ تا ۲۰ دارد. خانه‌ی i ام حافظه را با $A[i]$ نشان می‌دهیم. در ابتدا در تمام خانه‌های حافظه، عدد ۱ نوشته شده است. الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

۱. مقدار ans را برابر ۰ قرار بده.

۲. اگر مقدار تمام خانه‌های حافظه‌ی سلطان برابر ۰ بود به خط ۱۵ برو.

۳. مقدار ans را یک واحد زیاد کن.

۴. مقدار $index$ را برابر ۱ قرار بده.

۵. اگر $index > 20$ بود به خط ۲ برو.

۶. اگر $A[index] = 0$ بود به خط ۱۰ برو.

۷. مقدار $A[index]$ را برابر ۰ کن.

۸. مقدار $index$ را دو واحد زیاد کن.

۹. به خط ۵ برو.

۱۰. مقدار tmp را برابر ۰ قرار بده.

۱۱. اگر $20 < index < tmp$ بود، مقدار $A[index + 1]$ را برابر ans قرار بده.

۱۲. مقدار $A[index]$ را برابر tmp قرار بده.

۱۳. مقدار $index$ را یک واحد زیاد کن.

۱۴. به خط ۵ برو.

۱۵. پایان

پس از پایان الگوریتم، مقدار ans چیست؟

۵) الگوریتم هیچ گاه تمام نخواهد شد

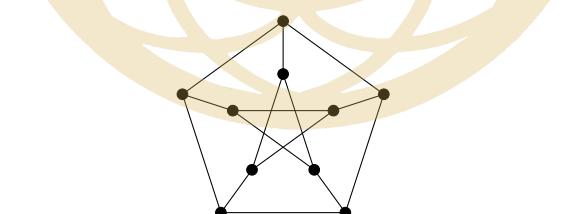
۱۰ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۲۰ (۱)

۲۲ گراف زیر را در نظر بگیرید:



یک گنج در یکی از رأس‌های گراف مخفی شده است. روزبه یک دستگاه گنجیاب دارد. او در هر مرحله می‌تواند یک دور به طول پنج از گراف را به دستگاه بدهد و بفهمد گنج در رأس‌های این دور هست یا خیر. روزبه دست کم به چند مرحله استفاده از دستگاه نیاز دارد تا مطمئن باشد می‌تواند جای گنج را بفهمد؟

۹ (۵)

۶ (۴)

۱ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

n دستگاه پخش کننده موسیقی یکسان و n هندزفری یکسان داریم. به هر کدام از دستگاه‌ها یک هندزفری وصل کردہ‌ایم. هر هندزفری نیز دو گوشی دارد که یکی مخصوص گوش راست و یکی مخصوص گوش چپ است.

مرحله‌ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

n نفر در یک گروه هستند و می‌خواهند از طریق این دستگاه‌ها و هندزفری‌ها موسیقی گوش کنند. هر کس می‌تواند یک گوشی چپ و یک گوشی راست برداشته و آهنگ گوش کند. دو گوشی‌ای که یک فرد بر می‌دارد می‌توانند از یک هندزفری نباشند، اما باید آهنگ یکسانی را پخش کنند. در انتها تأکید می‌کنیم دستگاه‌های پخش کننده و هندزفری‌ها را یکسان در نظر بگیرید.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

فرض کنید $4 = n$ است. دو تا از دستگاه‌ها در حال پخش موسیقی M_1 و دو تای دیگر در حال پخش موسیقی M_2 هستند. افراد به چند طریق می‌توانند هندزفری‌ها را استفاده کرده و موسیقی‌ها را گوش کنند؟

۲۴(۵)

۱۶(۴)

۱۸(۳)

۱۲(۲)

۴۸(۱)

دو نفر با نام‌های A و B را دوست گوییم، اگر هندزفری‌ای وجود داشته باشد که یک گوشی آن در اختیار A و گوشی دیگر در اختیار B باشد. دو نفر با نام‌های A و B را آشنا گوییم، اگر دنباله‌ی $\langle C_1, C_2, \dots, C_k \rangle$ از افراد وجود داشته باشد که $2 \geq k \geq 1$ و خود C_1 با C_2 دوست باشد، C_2 با C_3 دوست باشد و ... و C_{k-1} با C_k دوست باشد و C_k خود B باشد. واضح است که دو دوست، آشنا نیز هستند.

فرض کنید $10 = n$ است. پنج تا از دستگاه‌ها در حال پخش موسیقی M_1 و پنج تای دیگر در حال پخش موسیقی M_2 هستند. به حالتی از گوش کردن موسیقی‌ها سلطانی گوییم، اگر هیچ دو نفر غیر آشنایی، موسیقی یکسانی گوش نکنند. افراد به چند حالت سلطانی می‌توانند هندزفری‌ها را استفاده کرده و موسیقی‌ها را گوش کنند؟

۲۹(۵)

۱۰!(۴)

$\frac{10!}{2^5}(3)$

$2^8 \times 5! \times 2$

۹!(۱)

دنباله‌ای از اعداد طبیعی و متمایز را در نظر بگیرید که از عدد ۱ شروع شده و به عدد n ختم می‌شود. به چنین دنباله‌ای عول گوییم، اگر هر عدد دنباله، مضرب عدد قبلی باشد. برای مثال دنباله‌ی $\langle 1, 3, 6, 30, 60 \rangle$ یک دنباله‌ی عول است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

تعداد عناصر بلندترین دنباله‌ی عول به ازای $n = 810000$ چیست؟

۱۲(۵)

۹(۴)

۱۱(۳)

۱۳(۲)

۱۰(۱)

تعداد عناصر بلندترین دنباله‌ی عول به ازای $n = 10800$ را k در نظر بگیرید. تعداد دنباله‌های عول k عنصره به ازای $n = 10800$ چیست؟

۶!(۵)

۱۲۶۰(۴)

۹!(۳)

۲۸۸(۲)

۵۱۲۰(۱)

چند دنباله‌ی عول به ازای $n = 5120$ وجود دارد؟

۳۰۷۲(۵)

۴۰۹۶(۴)

۵۶۳۲(۳)

۶۱۴۴(۲)

۱۲۲۸۸(۱)

باکتری فلاجلاء به هنگام تولید مثل به سه باکتری تقسیم شده و خودش از بین می‌رود. به باکتری‌ای که تولید مثل می‌کند، والد و به سه باکتری به وجود آمده، فرزندان او می‌گوییم. ممکن است یک باکتری قبل از تولید مثل بمیرد که در این صورت به سرعت تجزیه شده و اثری از او باقی نمی‌ماند.

مرحله‌ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

مدت‌ها پیش، سلطان یک باکتری فلاجلا به نام آر.بی.جی خرید و آن را در قفس نگهداری می‌کرد! پس از مدتی این باکتری از بین رفته است، اما قفس تعدادی باکتری دارد که طبیعتاً از نولگان آر.بی.جی هستند. سلطان دلش برای آر.بی.جی تنگ شده و می‌خواهد زن آر.بی.جی را بازیابی کند. زیست‌شناسان به تکنولوژی‌ای دست پیدا کرده‌اند که با استفاده از زن دو تا از فرزندان یک باکتری والد، می‌توانند زن او را بازیابی کنند. فرض کنید تعداد باکتری‌های درون قفس n باشد. به یک وضعیت بحرانی گوییم، اگر بتوانیم زن آر.بی.جی را بازیابی کنیم، اما در این بازیابی به همه‌ی n باکتری نیاز داشته باشیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۸ در این سوال فرض کنید نتایج تحقیقات این باشد که هیچ کدام از فرزندان آر.بی.جی و فرزندان فرزندان او در قفس نیستند. در بین تمام حالات ممکن که امکان بازیابی زن آر.بی.جی وجود دارد، کمینه‌ی تعداد باکتری‌های درون قفس چیست؟

۴) ۵

۸) ۴

۹) ۳

۶) ۲

۷) ۱

باشگاه المیاد طلاب‌ها

۲۹ به ازای چند n از ۲ تا ۱۰ می‌توان وضعیتی بحرانی با n باکتری درون قفس داشت؟

۷) ۵

۱) ۴

۵) ۳

۹) ۲

۲) ۱

۳۰

کدام گزاره‌های زیر درست هستند؟

آ) وضعیتی با شش باکتری درون قفس وجود دارد که با استفاده از هر پنج باکتری می‌توانیم زن آر.بی.جی را بازیابی کنیم، اما چهار باکتری وجود دارند که نمی‌توان فقط با استفاده از آن‌ها زن آر.بی.جی را بازیابی کرد.

ب) وضعیتی با چهار باکتری درون قفس وجود دارد که به ازای هر دو باکتری، با استفاده از فقط همان دو باکتری می‌توان زن آر.بی.جی را بازیابی کرد.

ج) وضعیتی بحرانی با پنج باکتری وجود دارد که هر باکتری فرزند فرزند آر.بی.جی باشد.

۵) آ و ب

۴) آ و ج

۳) آ

۲) ب

۱) ب و ج