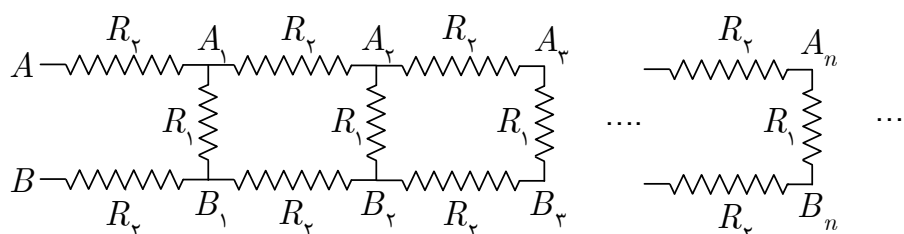
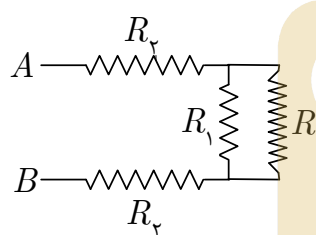




۱) در مدار شکل ۱، الگوی مقاومت های $R_p - R_1 - R_p$ بین دو نقطه A و B بی نهایت بار تکرار می شود.



شکل ۱



شکل ۲

چون الگوی سه مقاومت تا بی نهایت تکرار می شود مقاومت دو سر مدار با اضافه شدن یک الگوی اضافه در ابتدای آن تغییری نمی کند. یعنی اگر مقاومت دو نقطه A و B برابر R باشد، مدار شکل ۱ معادل مدار شکل ۲ می شود.

آ) مقاومت R بین دو نقطه A و B را بر حسب R_1 و R_p به دست آورید.

در بخش های زیر فرض کنید منبع ولتاژ V_0 را به دو سر A و B وصل کرده ایم.

ب) ولتاژ V_1 بین A_1 و B_1 در مدار شکل ۱ بر حسب V_0 ، R_1 و R_p چقدر است؟

پ) ولتاژ بین A_n و B_n روی دو سر n امین R_1 در مدار شکل ۱ بر حسب V_0 ، R_1 ، R_p و n چقدر است؟

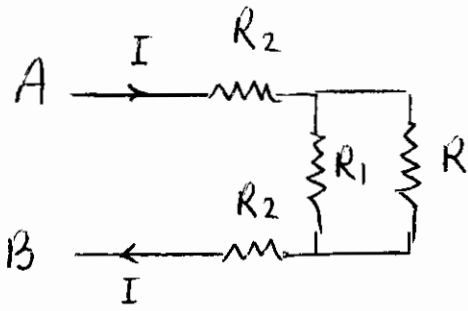
ت) مجموع توان مصرفی در تمام مقاومت های R_1 را با P_1 نشان می دهیم. P_1 را بر حسب V_0 ، R_1 و R_p به

دست آورید.

ث) با فرض آن که $x = \frac{R_1}{R_p}$ و $y = \frac{P_1}{P}$ که P توان کل مصرفی در مدار است، رابطه y بر حسب x را به

دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

مسئله (۱)



$$R = 2R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1}$$

(۱)

$$R^2 - 2R_2R - 2R_1R_2 = 0$$

$$R = R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2} \quad (1)$$

$$I = \frac{V_0}{R}, \quad V_{A_1B_1} = V_0 - 2R_2I$$

(۲)

$$V_1 = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)$$

باشگاه المپیاد طلایی

$$V_2 \equiv V_{A_2B_2} = V_1 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right) = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2 \quad (۳)$$

$$V_n \equiv V_{A_nB_n} = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^n$$

(ت) توان مصرفی در n امین R_1 ها $P_n^{(R_1)}$ بسایز می دهیم

$$P_n^{(R_1)} = \frac{V_n^2}{R_1} = \frac{V_0^2}{R_1} \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

و مجموع توان مصرفی در R_1 ها :

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(R_1)} = \frac{V_0^2}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n} = \frac{V_0^2}{R_1} \frac{\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2} \quad (۲)$$

$$P_1 = \frac{V_0^2 (R_1 + R_2 - \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2})}{2R_1 \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}$$

با قرار دادن R از معادله (۱) در (۲) و ساده سازی جواب :

$$P = \frac{V_o^2}{R} = \frac{V_o^2}{R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}$$

ث) توان کل مصرفی در مدار

$$y = \frac{P_1}{P}$$

پس از ساده کردن y در معادله

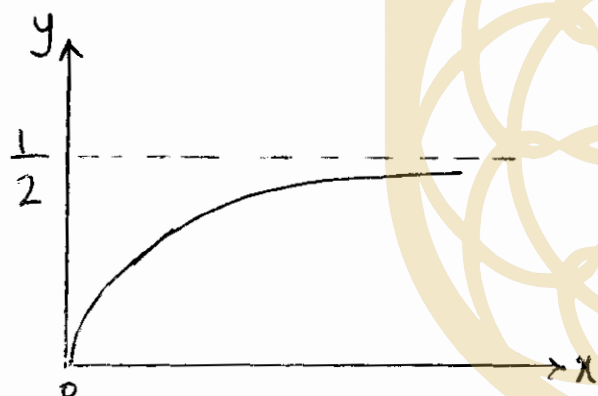
به نتیجه زیر می‌رسیم

$$y = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}} \right)$$

اگر $\frac{R_1}{R_2}$ را x بنویسیم

باشگاه المپیاد طلایی‌ها

$$y = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \right)$$





(۲) در پدیده دوپلر اگر یک چشمه صوتی متحرک با بسامد f_s با سرعت لحظه ای v_s حرکت کند، بسامد دریافت شده

توسط یک گیرنده ساکن $f = f_s \frac{u}{u \pm v_s}$ است که u سرعت صوت در هوای ساکن است و علامت مثبت برای

وضعیتی است که چشمه از گیرنده دور می شود و علامت منفی برای وضعیتی است که چشمه به گیرنده نزدیک می شود.

در صورتی که سرعت چشمه با زمان تغییر کند باید توجه داشت که اگر صوت با بسامد f_s در لحظه t' از چشمه منتشر

شود، در لحظه متفاوت t توسط گیرنده دریافت می شود. در این حالت v_s در فرمول بالا سرعت چشمه در لحظه t'

است و f بسامد دریافت شده توسط گیرنده در لحظه t است.

حال فرض کنید یک چشمه صوتی با بسامد f_s از ارتفاع h از سطح زمین در لحظه $t' = 0$ از حال سکون رها شود.

گیرنده ای درست زیر آن روی سطح زمین قرار دارد و بسامد $f(t)$ دریافت شده بر حسب زمان را اندازه گیری می کند.

فرض کنید چشمه در زمان t' بعد از رها شدن، صوت با بسامد f_s منتشر می کند. شتاب گرانش را g بگیرید و از نیروی

مقاومت هوا چشم پوشی کنید.

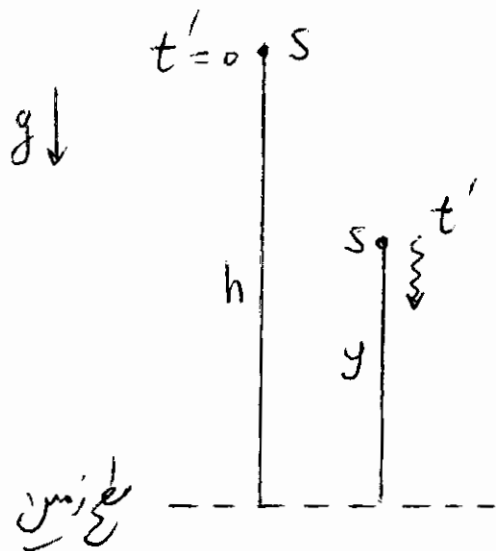
(آ) زمان t' را بر حسب u ، g ، h و t به دست آورید.

(ب) سرعت چشمه در زمان t' یعنی $v_s(t')$ را بر حسب u ، g ، h و t به دست آورید.

(پ) بسامد اندازه گیری شده توسط گیرنده روی زمین در زمان t ، یعنی $f(t)$ را بر حسب u ، g ، h و t به

دست آورید. فرض کنید سرعت چشمه همواره کمتر از سرعت صوت است.

(ت) نشان دهید $\frac{1}{f^2} = A + Bt$ و A و B را بر حسب u ، g ، h تعیین کنید.



مسئله (۲)
(۱) ضربه در لحظه $t=0$ در ارتفاع h از سطح زمین

و در لحظه t' در ارتفاع y از سطح زمین است

و سرعت آن v_s است

$$v_s = gt' \quad \text{و} \quad y = h - \frac{1}{2}gt'^2$$

صوت در لحظه t' ارسال می شود و در لحظه t

بگیرنده در زمین می رسد

$$t = t' + \frac{y}{u}$$

باشگاه المپیاد طلایی ها

از دو معادله اخذ

$$gt'^2 - 2ut' + 2ut - 2h = 0$$

$$t' = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 2gh - 2ugt}}{g}$$

$$v_s(t) = u - \sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}$$

(ب)

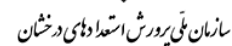
$$f(t) = f_s \frac{u}{u - v_s(t)}$$

(پ)

$$f(t) = f_s \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}}$$

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{f_s} \left(1 + \frac{2gh}{u^2} - \frac{2gt}{u} \right) \quad \text{در نتیجه}$$

$$A = \frac{1}{f_s^2} \left(1 + \frac{2gh}{u^2} \right), \quad B = -\frac{2g}{uf_s^2}$$



است.

(ث) جسم m_2 چه شرطی باید داشته باشد تا شتاب حرکتش نسبت به میز رو به بالا باشد؟



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

ج) با فرض $y_{\text{پ}} = y_{\text{و}}$ ، مدت زمانی که طول می کشد تا لبه بالایی جسم $m_{\text{پ}}$ هم تراز با پایین ترین نقطه قرقره

متحرک شود، چقدر است؟

باشگاه المپیاد طلایی ها



مسئله (۳)
(۲)

$$\begin{cases} D = (h - y_1) + \pi R + (h - y_4) \\ d = (y_4 - y_2) + \pi r + (y_4 - y_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = (h - \frac{1}{2} a_1 t^2 - y_{10}) + \pi R + (h - \frac{1}{2} a_4 t^2 - y_{40}) \\ d = (\frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - \frac{1}{2} a_2 t^2 - y_{20}) + \pi r + (\frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - \frac{1}{2} a_3 t^2 - y_{30}) \end{cases}$$

پ) روابط قسمت (۲) برار کنیم $t=0$ نیز باید درست باشند یعنی

$$\begin{cases} D = (h - y_{10}) + \pi R + (h - y_{40}) \\ d = (y_{40} - y_{20}) + \pi r + (y_{40} - y_{30}) \end{cases}$$

از معادله ب روابط قسمت ب) باید

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} a_1 t^2 - \frac{1}{2} a_4 t^2 = 0 \\ a_4 t^2 - \frac{1}{2} a_2 t^2 - \frac{1}{2} a_3 t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_4 = 0 \\ 2a_4 - a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - a_2 - a_3 = 0 \\ (1) \end{cases}$$



ت) نمودار جسم آزاد

$$\begin{aligned} T - m_1 g &= m_1 a_1 & (2) \\ T' - m_2 g &= m_2 a_2 & (3) \\ T' - m_3 g &= m_3 a_3 & (4) \\ T - 2T' - (0)g &= (0)a_4 & (5) \end{aligned}$$

$T' = T/2$

اگر معادلات (۲) و (۳) و (۴) را به ترتیب در $m_1 m_2$ ، $m_1 m_3$ و $2m_2 m_3$ ضرب و جمع کنیم، با توجه به (۱) خواهیم داشت

$$2 m_2 m_3 (T - m_1 g) + m_1 m_3 (\frac{T}{2} - m_2 g) + m_1 m_2 (\frac{T}{2} - m_3 g) = 0$$

$$T = \frac{8 m_1 m_2 m_3 g}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3}, \quad T' = \frac{T}{2}$$

با قرار دادن T و T' در معادلات (۲) و (۳) و (۴)

$$a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$a_4 = -a_1$$

$$a_2 = \frac{3m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$a_3 = \frac{3m_1m_2 - m_1m_3 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$\left| \frac{3}{m_2} > \frac{1}{m_3} + \frac{4}{m_1} \right|$$

ث (بار این) $a_2 > 0$ نه

باشگاه المپیاد طلایی ها

$$y_{20} + \frac{1}{2}(d - \pi r) = y_{40} ; y_{20} = y_{30}$$

ج) وقتی

$$y_2(t) = y_4(t) - r$$

ی خواصم

$$\frac{1}{2} a_2 t^2 + y_{20} = \frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - r$$

$$(a_2 - a_4) t^2 = d - r(2 + \pi)$$

در نتیجه

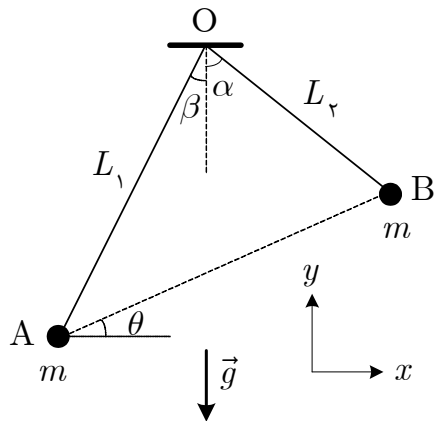
$$\frac{2(m_1m_3 - m_1m_2)g}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} t^2 = d - r(2 + \pi)$$

$$m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3$$

نه نه $m_3 > m_2$

$$t = \sqrt{\frac{d - r(2 + \pi)}{2g} \frac{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}{m_1(m_3 - m_2)}}$$

در نتیجه:



(۴) دو گلوله کوچک هر یک به جرم m دارای بار الکتریکی هم نام هستند و مطابق شکل به دو نخ بسیار سبک به طول های L_1 و L_2 متصل اند. دو انتهای دیگر نخ ها به تکیه گاهی واقع در نقطه O بسته شده اند. مقدار بار الکتریکی روی گلوله ها به گونه ای است که دستگاه در حضور نیروی دافعه الکتریکی بین بارها و نیروی گرانش در حالت تعادل است و زاویه α معلوم است.

(آ) قانون دوم نیوتون را در دو راستای x و y برای هر یک از گلوله ها بر حسب توابع مثلثاتی زاویه های α ، β ، θ ، اندازه نیروی دافعه کولنی F ، mg و نیروی کشش نخ ها بنویسید.

(ب) با استفاده از معادلات قسمت آ، $\tan \theta$ را بر حسب توابع مثلثاتی زاویه های α و β به دست آورید.

(پ) طول پاره خط AB را d بنامید. $d \sin \theta$ و $d \cos \theta$ را بر حسب L_1 ، L_2 و توابع مثلثاتی زاویه های α و β بنویسید.

(ت) زاویه β را بر حسب $\frac{L_2}{L_1}$ و توابع مثلثاتی زاویه α به دست آورید.

(ث) نیروی کشش هر کدام از نخ ها را بر حسب mg ، $\frac{L_2}{L_1}$ و توابع مثلثاتی زاویه α به دست آورید.

(ج) به ازای $\frac{L_2}{L_1} = 1$ نیروی کشش هر کدام از نخ ها چقدر است؟



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

چ) فرض کنید طول نخ‌ها به اندازه‌ای است که $\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $\beta = \frac{\pi}{6}$ باشد. نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها و اندازه

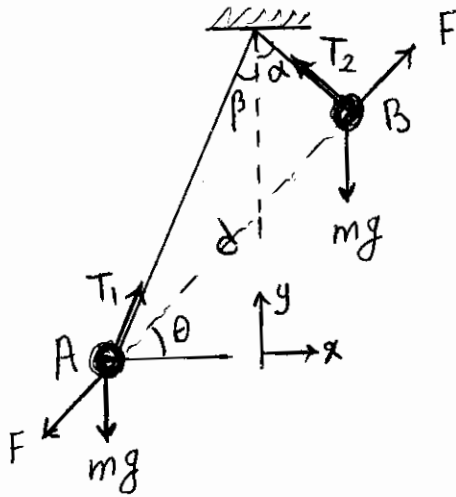
نیروی دافعه کولنی را بر حسب mg به دست آورید.

باشگاه المپیاد طلایی‌ها



مسئله ۴ (۲)

بار جرم m است راستی



$$x: F \cos \theta - T_2 \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$y: F \sin \theta + T_2 \cos \alpha - mg = 0 \quad (2)$$

بار جرم m است چپ

$$x: -F \cos \theta + T_1 \sin \beta = 0 \quad (3)$$

$$y: -F \sin \theta + T_1 \cos \beta - mg = 0 \quad (4)$$

۲) با تکرار داریم T_2 از معادله (۱) و معادله (۲)

$$F (\sin \theta + \cos \theta \cot \alpha) = mg \quad (5)$$

و با تکرار دادن T_1 از معادله (۳) و معادله (۴)

$$F (-\sin \theta + \cos \theta \cot \beta) = mg \quad (6)$$

از تقسیم معادلات (۵) و (۶)

$$\tan \theta = \frac{1}{2} (\cot \beta - \cot \alpha) \quad (7)$$

۳)

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= L_1 \cos \beta - L_2 \cos \alpha \\ d \cos \theta &= L_1 \sin \beta + L_2 \sin \alpha \end{aligned}$$

از تقسیم دو معادله

$$\tan \theta = \frac{L_1 \cos \beta - L_2 \cos \alpha}{L_1 \sin \beta + L_2 \sin \alpha} \quad (8)$$

۴) از مساوی قرار دادن معادلات (۷) و (۸) و پس از ساده کردن

$$\sin \beta = \frac{L_2}{L_1} \sin \alpha \quad (9)$$

ث) بآنگار رادع $\sin \beta$ از معادله (۹) در معادله (۷)

$$\tan \theta = \frac{1}{2 \sin \alpha} \left(\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \quad (10)$$

ب. حذف F بین دو معادله (۱) و (۲)

$$T_2 = \frac{mg}{\tan \theta \sin \alpha + \cos \alpha} \quad (11)$$

و ب. حذف F بین دو معادله (۳) و (۴) و استفاده از معادله (۷)

$$T_1 = \frac{mg \sin \alpha}{\tan \theta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta} \quad (12)$$

بآنگار رادع (۱۰) در (۱۱)

$$T_2 = \frac{2mg}{\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} \quad (13)$$

بآنگار رادع (۱۰) در (۱۲) و استفاده از معادله (۹)

$$T_1 = \frac{2mg \left(\frac{L_1}{L_2} \right)}{\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} \quad (14)$$

ع. به ازای $L_1 = L_2$

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{\cos \alpha}$$

ج. به ازای $\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $\beta = \frac{\pi}{6}$ از معادله (۹) خواصم داشت

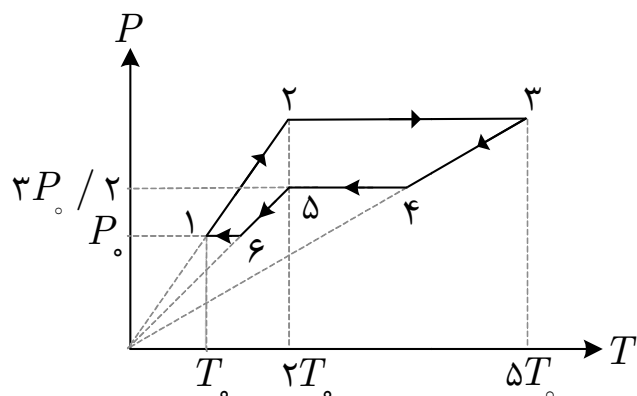
$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

بآنگار رادع $\frac{L_2}{L_1}$ در معادلات (۱۳) و (۱۴) و $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$T_2 = \frac{2mg}{\sqrt{3 - \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} = mg, \quad T_1 = \frac{2\sqrt{3}mg}{\sqrt{3 - \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} = \sqrt{3}mg$$

از معادله (۱۰) به دست می آید $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و در نتیجه

$$F = T_2 = mg$$



۵) چرخه ۱۲۳۴۵۶۱ در شکل مقابل، فرآیند n مول گاز

کامل تک اتمی را نشان می‌دهد. کمیت‌های T_0 و P_0

معلوم‌اند. ثابت گازها R است. انرژی داخلی n مول

گاز کامل تک اتمی با دمای T برابر $\frac{3}{2}nRT$ است.

آ) چرخه را در صفحه $P-V$ رسم کنید و

مختصات (P, V, T) نقاط متناظر با شش نقطه نشان داده شده در نمودار فوق را به دست آورید.

ب) کار کل انجام شده روی گاز را در چرخه کامل بر حسب n ، R و T_0 به دست آورید. این کار مثبت است یا

منفی؟

پ) در کدام یک از فرآیندهای $1 \rightarrow 2$ ، $2 \rightarrow 3$ ، $3 \rightarrow 4$ ، $4 \rightarrow 5$ ، $5 \rightarrow 6$ و $6 \rightarrow 1$ گاز از محیط گرما

می‌گیرد؟ مجموع گرماهای داده شده از محیط به گاز در این چرخه را بر حسب n ، R و T_0 به دست آورید.

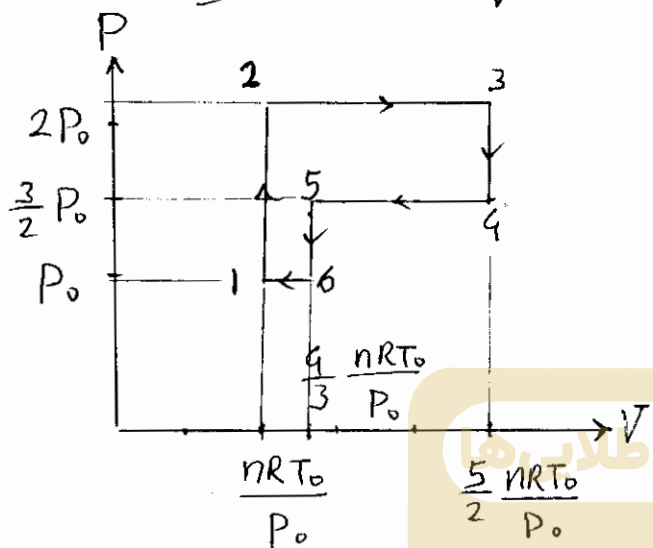
ت) اگر این چرخه مربوط به یک ماشین گرمایی باشد، بازده این ماشین گرمایی چقدر است؟

مسئله (۵)

(۲) با توجه به معادله گاز کامل $PV = nRT$ در نمودار P

بر حسب T شیب (ضریب زاویه) $\frac{nR}{V}$ است، بنابراین خطوط

دارای شیب یکسان هم رسم می‌کنند



نقطه (۱) $(P_0, \frac{nRT_0}{P_0}, T_0)$

نقطه (۲) $(2P_0, \frac{nRT_0}{P_0}, 2T_0)$

نقطه (۳) $(2P_0, \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0}, 5T_0)$

نقطه (۴) $(\frac{3}{2} P_0, \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0}, \frac{15}{4} T_0)$

نقطه (۵) $(\frac{3}{2} P_0, \frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0}, 2T_0)$

نقطه (۶) $(P_0, \frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0}, \frac{4}{3} T_0)$

ب) کار، حرارت منفی، مساحت داخل چرخه، W ، در صفحه $P-V$ است

$$|W| = \left(\frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) \frac{P_0}{2} + \left(\frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) \frac{P_0}{2}$$

$$|W| = \frac{11}{12} nRT_0$$

W حرارت منفی است.

پ) اگر Q گرمای داده شده به گاز در یک چرخه باشد

در فرآیندهای $1 \rightarrow 2$ و $2 \rightarrow 3$ گاز از محیط بیرون می‌گیرد:

$$Q = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3}$$

اما طبق قانون اول ترمودینامیک

$$U_2 - U_1 = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}$$

$$\frac{3}{2} nR(2T_0) - \frac{3}{2} nRT_0 = 0 + Q_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2} nRT_0$$

$$U_3 - U_2 = W_{2 \rightarrow 3} + Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$\frac{3}{2} nR(5T_0) - \frac{3}{2} nR(2T_0) = -(2P_0) \left(\frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) + Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{15}{2} nRT_0$$

بنا بر این

$$Q = \frac{3}{2} nRT_0 + \frac{15}{2} nRT_0$$

$$Q = 9 nRT_0$$

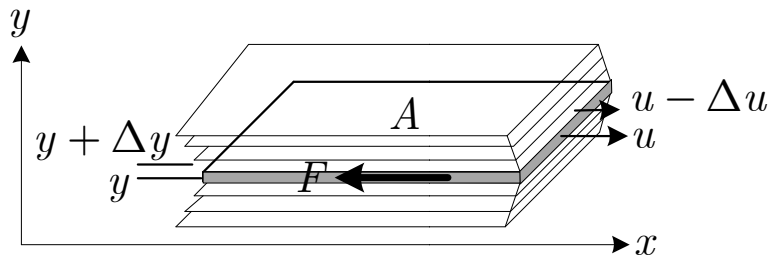
$$\text{بازده} = \frac{|W| \text{ صرفه}}{Q \text{ "گرمای داده شده"}} = \frac{11}{12} \frac{1}{9} \approx \frac{1}{10}$$

(۵)

$$\text{بازده} = \frac{11}{108} \approx \frac{1}{10}$$

باشگاه المپیاد طلایی‌ها





۶) گرانیروی (Viscosity) خاصیتی از یک

سیال است که باعث کندی حرکت اجسام

نسبت به سیال می شود. سیال را به صورت

لایه هایی با ضخامت ناچیز Δy در نظر

بگیرید. اگر جسمی در راستای x با سرعت u در داخل یک سیال حرکت کند، لایه ای از سیال که در مجاورت آن است

تقریباً همراه آن کشیده می شود. لایه های دورتر نیز به دلیل خاصیت گرانیروی به حرکت در می آیند و هر چه در جهت

عمود بر لایه های متحرک (راستای y در شکل بالا) از جسم دورتر شویم سرعت آن ها کمتر می شود. به بیان دیگر اگر

Δu اختلاف سرعت دو لایه مجاور باشد، $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ کمیتی مخالف صفر است. به این ترتیب اگر سطح تماس جسم با

سیال A باشد نیروی اصطکاک F در خلاف جهت حرکتش به آن وارد می شود که اندازه آن از رابطه

$$F = \eta A \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right|$$

به دست می آید. در این رابطه، η ضریب گرانیروی نامیده می شود.

آ) واحد ضریب گرانیروی در دستگاه واحدهای SI را بر حسب پاسکال و سایر کمیت های اصلی بیان کنید.

اگر یک جسم کروی به شعاع r با سرعت u در داخل یک سیال گرانیرو حرکت کند می توان نشان داد نیروی اصطکاک

$F = 6\pi\eta ru$ به آن وارد می شود که به این رابطه قانون استوکس گفته می شود. برای اجسام کوچک نیروی گرانیروی را

می توان تنها نیروی اصطکاک مهم در نظر گرفت.

ب) یک جسم کروی به شعاع r و چگالی ρ داخل سیالی به چگالی ρ' ($\rho > \rho'$) و ضریب گرانیروی η سقوط

می کند و پس از مدتی به سرعت ثابتی می رسد که به آن سرعت حد می گوئیم. این سرعت را بر حسب ρ ، ρ' ، η ،

r و g به دست آورید.

پ) سرعت حد سقوط یک قطره کوچک کروی آب به قطر 0.4 mm را در جو زمین به دست آورید. همچنین سرعت حد سقوط یک ویروس کرونا که آن را کره‌ای به قطر $0.12 \mu\text{m}$ و با چگالی نزدیک آب می‌گیریم، به دست آورید. به داده‌های آخر مسئله توجه کنید.

در آزمایش معروف میلیکان تعداد بسیار زیادی از قطرات باردار روغن توسط یک عطریاش به داخل محفظه‌ای که بین دو الکترود صفحه‌ای افقی قرار دارد پاشیده و به صورت عمودی سقوط می‌کنند. کلیه قطرات به دلیل کوچک بودن، در بازه زمانی ناچیزی به سرعت حد می‌رسند. با اعمال اختلاف پتانسیل بین صفحات می‌توان یک میدان الکتریکی یکنواخت در راستای قائم برقرار کرد. توسط یک میکروسکوپ می‌توان از بیرون، حرکت یک قطره روغن را با دقت رصد کرد و سرعت آن را اندازه‌گیری کرد.

ت) در شکل زیر رابطه خطی سرعت حد یک قطره روغن با ولتاژ اعمال شده بین صفحات داده شده است. فرض کنید ولتاژ صفحه بالایی به اندازه V از صفحه پایینی بیشتر است. در حرکت به سمت بالا u مثبت و در حرکت به سمت پایین u منفی فرض شده است. اگر V_0 و $-u_0$ به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ رابطه خطی u بر حسب V باشد، شعاع قطره روغن و بار روی آن را بر حسب u_0 ، V_0 ، η (ضریب گرانشی هوا)، ρ_a (چگالی هوا)، ρ_0 (چگالی روغن)، g (شتاب گرانش) و d (فاصله عمودی بین الکترودها) به دست آورید.

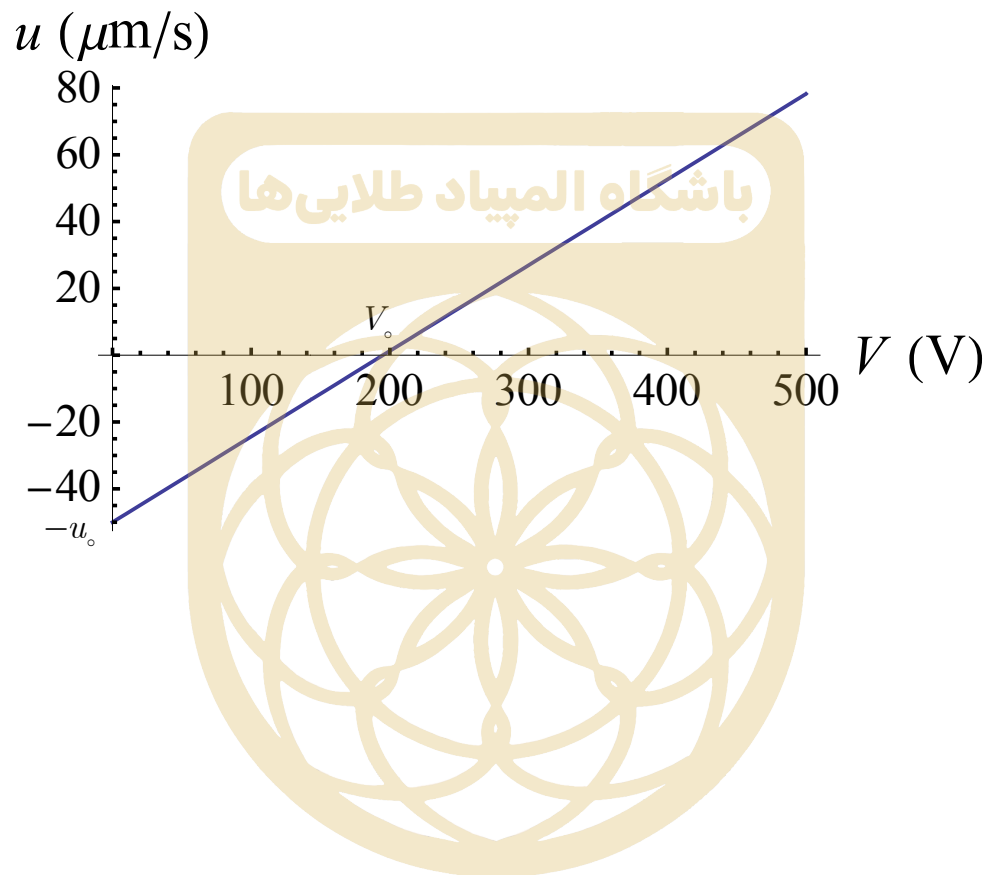
ث) با فرض مقادیر عددی زیر و با استفاده از مقادیر عددی V_0 و u_0 از روی نمودار، شعاع قطره و بار الکتریکی آن را حساب کنید.



داده های عددی:

$$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3 \text{ (آب)}, \rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3 \text{ (هوا)}, \rho_o = 880 \text{ kg/m}^3 \text{ (روغن)}$$

$$\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ (در دستگاه SI)}, g = 9.8 \text{ m/s}^2, d = 1.0 \text{ mm}$$



$$\frac{F}{A} = \eta \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right| \Rightarrow Pa = (\eta \text{ و } s) \left(\frac{\frac{m}{s}}{m} \right)$$

مسئله ۴
(۱)

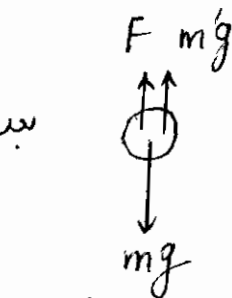
$$|(\eta \text{ و } s) = Pa \cdot s|$$

بعد از رسیدن به سرعت حد شد: جسم صفراست، در نتیجه

$$F + m'g - mg = 0 \quad (a)$$

$$6\pi r \eta u_{\text{حد}} + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho' g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g = 0$$

$$u_{\text{حد}} = \frac{2}{9} \frac{(P - P') g r^2}{\eta}$$



(ب)

F: نیروی اصطکاک

m'g: نیروی شناور

mg: نیروی گرانش

(پ) برای قطر آبی به شعاع $r = 0.2 \text{ mm}$ که در هوا $P' = P_a$ سقوط می کند

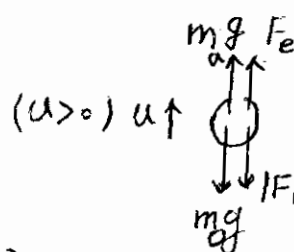
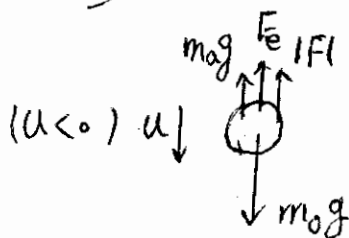
$$u_{\text{حد}} = \frac{2}{9} \frac{(P_w - P_a) g r^2}{\eta} = \frac{2}{9} \frac{(1000 - 102)(9.8)(2 \times 10^{-4})^2}{1.8 \times 10^{-5}}$$

$$u_{\text{حد}} = 4.8 \text{ m/s}$$

برای دیدن گردن به شعاع $r = 0.06 \mu\text{m}$

$$u_{\text{حد}} = 0.44 \mu\text{m/s}$$

(ت) با توجه به نمودار داده شده در صورت مسئله در حالت تعین که $u = 0$ است، نیروی الکتریکی وارد بر قطره روغن باید به سمت بالا باشد، بنابراین بار الکتریکی قطره منفی است که آن را -191 nC می گیریم.



y ↑

نمودار جسم آزاد برای حرکت قطره به سمت بالا و پایین:

$$191 \frac{V}{d} - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_a g - 6\pi \eta r u = 0 \quad \text{در هر دو حالت:}$$

$$u_{\text{حد}} = \frac{191}{6\pi \eta r d} \frac{V}{d} - \frac{2}{9} \frac{(\rho_0 - \rho_a) g r^2}{\eta}$$

از آنجا که $\rho_a \ll \rho_o$ است از ρ_a در مقابل ρ_o چشم پوش می‌کنیم. با توجه به نمودار:
 به ازای $V=0$ داریم $u_o = -u_o$ در نتیجه

$$r = \sqrt{\frac{q}{2} \frac{\eta u_o}{\rho_o g}}$$

به ازای $u_o = 0$ داریم $V = V_o$ در نتیجه

$$|q| = \frac{q}{3} \pi r^3 \rho_o g \frac{d}{V_o}$$

$$|q| = \frac{18 \pi d}{V_o} \sqrt{\frac{\eta^3 u_o^3}{2 \rho_o g}}$$

با قرار دادن مقدار r به دست می‌آوریم:

ث) با توجه به نمودار $u_o = 50 \mu\text{m/s}$ و $V_o = 195 \text{ V}$ ، در نتیجه:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{q}{2} \frac{\eta u_o}{\rho_o g}} = 3 \sqrt{\frac{(1.8 \times 10^{-5})(5 \times 10^{-5})}{(2)(880)(9.8)}} = \frac{(31)(3 \times 10^{-5})}{4 \sqrt{(110)(9.8)}} \approx \frac{9 \times 10^{-5}}{(4)(33)} \\ &= \frac{30}{44} \mu\text{m} \Rightarrow |r \approx 0.68 \mu\text{m}| \\ |q| &= \frac{6 \pi \eta u_o d}{V_o} r = \frac{(6)(3.14)(1.8 \times 10^{-5})(5 \times 10^{-5})(8 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-6})}{(195)} \times (44) \\ &= \frac{(6)(3.14)(9)(20)}{65 \times 11} \times 10^{-19} \\ &= \left(\frac{54}{11}\right) \left(\frac{6.28}{6.5}\right) \times 10^{-19} \\ &\approx (5)(9.6) \times 10^{-19} \text{ C} = 4.8 \times 10^{-19} \text{ C} \end{aligned}$$

$$|q| = 4.8 \times 10^{-19} \text{ C} = 3e$$