

مرحله‌ی دوم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

- آزمون ۲۰ سوال دارد و مدت زمان آن ۲۱۰ دقیقه است.
- سوالات ۱۱ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.

۱ آقای مدیر در راستای صیانت از محیط زیست، رفته بود کلنگ احداث کارخانه‌ای در جوار تالاب پایان‌کاله را بزند که با پشه روبه‌رو شد. آقای مدیر به اصرار پشه برای نیش زدن پاسخ منفی داد اما به او گفت: مسئله‌ای داریم که اگر حل شود، دستور می‌دهم مشکل معیشت شما را هم برطرف کنند. ما در این جا یک زمین داریم که به شکل یک جدول ۲۰×۱۴۰۱ است. در حال حاضر، همه‌ی خانه‌های این جدول را آب گرفته. می‌خواهیم تعدادی از خانه‌های جدول را خشک کنیم طوری که به ازای هر زیرمستطیل با بیش از یک خانه در این جدول، حداقل نصف خانه‌های آن زیرمستطیل خشک شده باشند. در راستای حمایت از جمعیت هم‌نوعان، پشه می‌خواهد تعداد خانه‌های خشک شده کمینه باشد. حداقل چند خانه از جدول باید خشک شوند؟

(۱) ۲۱۲۴۱۱۱ (۲) ۲۱۲۴۶۱۶ (۳) ۱۸۸۸۵۴۸ (۴) ۱۴۱۶۴۱۱ (۵) ۹۴۴۲۷۴

۲ پشمک یک جدول ۱۰×۴ همانند شکل زیر دارد و می‌خواهد تعدادی لوله‌ی I-شکل در خانه‌های این جدول قرار دهد طوری که هر لوله داخل یک خانه قرار بگیرد و با طی کردن تعدادی لوله، از یکی از اضلاع خانه‌ی A به یکی از اضلاع خانه‌ی B مسیر وجود داشته باشد. پشمک دوست دارد محیط‌زیست است و می‌خواهد با کم‌ترین تعداد لوله این کار را انجام دهد. پشمک به چند طریق می‌تواند تعدادی لوله در این جدول قرار دهد طوری که تعداد لوله‌ها کمینه باشد و از A به B مسیر وجود داشته باشد؟ یک نمونه از لوله‌گذاری که در آن از ضلع راست A به ضلع پایین B مسیر وجود دارد، در جدول زیرین آمده است. دقت کنید که تعداد لوله‌ها در این مثال لزوماً کمینه نیست.

									B
A									



									B
A									

یک نمونه از لوله‌گذاری با ۱۷ لوله

(۱) ۵۸ (۲) ۴۲ (۳) ۴۶ (۴) ۷۶ (۵) ۶۸

مرحله‌ی دوم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

سه نفر با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ دور دایره نشسته‌اند و با هم بازی می‌کنند. هر نفر دو کارت دارد که شماره‌ی افراد دیگر به جز خودش روی آن‌ها نوشته شده است. بازی از فرد با شماره‌ی ۱ شروع می‌شود. هر نفر در نوبت خود، از میان کارت‌هایی که در حال حاضر در اختیار دارد، یک کارت را به صورت تصادفی (با احتمال یکسان) انتخاب می‌کند و نوبت را به فردی که شماره‌اش روی کارت منتخب آمده است می‌دهد و آن کارت را دور می‌اندازد. بازی زمانی پایان می‌یابد که فردی که نوبتش است، هیچ کارتی نداشته باشد. پس از پایان بازی، امید ریاضی تعداد کل کارت‌های دور انداخته شده چه قدر است؟

۴ (۵)

$\frac{11}{4}$ (۴)

۶ (۳)

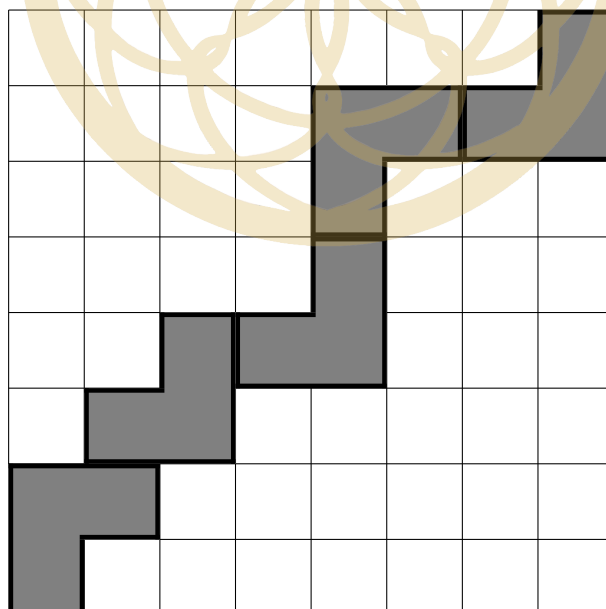
۵ (۲)

$\frac{9}{3}$ (۱)

در مغازه‌ی آقا جلال، کاشی‌هایی به شکل  فروخته می‌شود. یک جدول 8×8 داریم. می‌خواهیم تعدادی کاشی بخریم و آن‌ها را طوری در جدول قرار دهیم که کاشی‌کاری معتبر باشد. یک کاشی‌کاری معتبر است اگر همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد:

- هیچ دو کاشی‌ای هم‌پوشانی نداشته باشند.
- خانه‌های پایین-چپ و بالا-راست جدول حتماً کاشی‌کاری شده باشند.
- تنها با حرکت روی خانه‌های کاشی‌کاری شده‌ی جدول، بتوان از خانه‌ی پایین-چپ جدول شروع کرد، در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور ضلعی رفت، و در انتها به خانه‌ی بالا-راست جدول رسید.

با توجه به قیمت بالای کاشی‌های مغازه‌ی آقا جلال، می‌خواهیم تعداد کاشی‌هایی که می‌خریم کمینه باشد. به چند طریق می‌توان جدول را به صورت معتبر و با کم‌ترین تعداد کاشی ممکن کاشی‌کاری کرد؟ لازم به ذکر است که دو کاشی‌کاری متفاوتند اگر و تنها اگر یک خانه از جدول وجود داشته باشد که فقط در یکی از این دو حالت کاشی‌کاری شده باشد. در شکل زیر، یک نمونه کاشی‌کاری معتبر نمایش داده شده است. توجه کنید که تعداد کاشی‌ها در این نمونه لزوماً کمینه نیست.



۱۹۲ (۵)

۹۶ (۴)

۱۲۸ (۳)

۲۵۶ (۲)

۲۲۴ (۱)

مرحله‌ی دوم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

۵ دنباله‌ای از سیاه‌چاله‌ها در یک ردیف و به ترتیب با اندازه‌های «۳، ۱، ۵، ۲، ۳، ۵، ۸، ۲، ۳، ۲، ۸، ۴، ۵» در فضا قرار گرفته‌اند. می‌دانیم با ادغام تعدادی سیاه‌چاله، یک سیاه‌چاله‌ی جدید با اندازه‌ای برابر با مجموع اندازه‌ی سیاه‌چاله‌های اولیه به دست می‌آید. حال می‌خواهیم یک بازه‌ی متوالی از یک یا چند سیاه‌چاله را انتخاب کنیم و با ادغامشان یک سیاه‌چاله‌ی بزرگ بسازیم؛ سپس تا جایی که اندازه‌ی سیاه‌چاله‌مان از اندازه‌ی یکی از سیاه‌چاله‌های همسایه (راست یا چپ) بزرگ‌تر یا مساوی است، آن را با ادغام با سیاه‌چاله‌ی همسایه، بزرگ‌تر کنیم. چند بازه‌ی متوالی متمایز از دنباله‌ی سیاه‌چاله‌ها وجود دارد که در صورت انتخاب برای ادغام اولیه، می‌توان با این فرایند همه‌ی سیاه‌چاله‌ها را با هم ادغام کرد؟

۸۰ (۱) ۸۴ (۲) ۷۸ (۳) ۸۲ (۴) ۷۶ (۵)

۶ جک یک عدد ۹ رقمی دارد که می‌خواهد آن را «پالایش» کند. فرایند پالایش به این صورت است که در هر مرحله، ارقام عدد فعلی به کم‌ترین تعداد بازه‌ی متوالی تقسیم می‌شوند طوری که ارقام در هر بازه یکسان باشند. سپس برای ایجاد عدد جدید (جایگزین عدد فعلی)، به ازای هر یک از این بازه‌ها به ترتیب از چپ به راست، طول آن‌ها (تعداد ارقام در هر بازه) نوشته می‌شود. برای مثال، عدد ۱۲۲۳۱۸۸۸۸ بعد از یک مرحله پالایش به عدد ۱۲۱۱۴ تبدیل می‌شود. جک فرایند پالایش را تا وقتی که به یک عدد یک رقمی برسد ادامه می‌دهد. عدد یک رقمی نهایی چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟ در مثال زیر، فرایند پالایش عدد ۱۲۲۳۱۸۸۸۸ را مشاهده می‌کنید که به عدد ۲ ختم می‌شود.

$$۱۲۲۳۱۸۸۸۸ \rightarrow ۱۲۱۱۴ \rightarrow ۱۱۲۱ \rightarrow ۲۱۱ \rightarrow ۱۲ \rightarrow ۱۱ \rightarrow ۲$$

۸ (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۶ (۵)

۷ یک گراف ساده و همبند ۱۱ رأسی داریم که می‌توان از هر رأس آن با طی حداکثر ۵ یال به هر رأس دیگر رسید. از طرفی دو رأس در این گراف وجود دارند که برای رسیدن از یکی به دیگری طی کردن حداقل ۵ یال لازم است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۳۲ (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۲۶ (۴) ۳۰ (۵)

۸ کلاه قرمزی یک جدول ۱۰×۱۰ دارد که سطرها و ستون‌های آن از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده‌اند و در هر خانه‌ی آن دقیقاً یک سوراخ وجود دارد. بچه‌ی فامیل دور که ۸ تیله دارد، این جدول را پیدا کرده است. او به ازای هر تیله، یکی از خانه‌های جدول را به صورت تصادفی با احتمال یکسان انتخاب می‌کند و تیله را در سوراخ آن خانه می‌اندازد (امکان دارد در سوراخ یک خانه، چندین تیله قرار بگیرد). حال اگر تعداد تیله‌های واقع در سوراخ خانه‌ی تقاطع سطر i ام و ستون j ام را با $c_{i,j}$ نمایش دهیم، زیبایی جدول با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} i \times j \times (c_{i,j})^2$$

امید ریاضی زیبایی جدول پس از انداختن ۸ تیله چه قدر است؟

۱۶۶۷ (۱) ۱۲۹۴۷ (۲) ۱۶۷۶۷ (۳) ۱۹۳۶ (۴) ۲۵۰۴۷ (۵)

مرحله‌ی دوم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

۹ یک گراف $(\mathcal{E})$ رأسی داریم که هر رأس آن متناظر با یک رشته‌ی دودویی به طول ۲۶ با ۲۰ رقم صفر و ۶ رقم یک است. در این گراف، بین دو رأس متفاوت، یال (بدون جهت) می‌گذاریم اگر و تنها اگر رشته‌ی متناظر با یکی از آن‌ها با یک «شیف‌ت دوری»، قابل تبدیل به رشته‌ی متناظر با رأس دیگر باشد. عملیات شیفت دوری روی یک رشته‌ی دودویی را این‌گونه تعریف می‌کنیم که راست‌ترین رقم رشته را حذف، و آن را در چپ‌ترین جایگاه رشته اضافه می‌کنیم. برای مثال، شیفت دوری رشته‌ی ۱۰۰۰۱۰۱، رشته‌ی ۱۱۰۰۰۱۰ را نتیجه می‌دهد. تعداد مؤلفه‌های همبندی این گراف را بشمارید.

۸۸۵۵ (۱) ۸۸۷۷ (۲) ۸۸۸۸ (۳) ۸۸۹۹ (۴) ۸۸۶۶ (۵)

۱۰ به یک جایگشت از اعداد ۱ تا ۱۰ ملایم می‌گوییم اگر حاصل ضرب هر دو عدد متوالی در جایگشت، حداکثر ۳۰ شود. چند جایگشت ملایم از اعداد ۱ تا ۱۰ داریم؟

۱۷۲۸ (۱) ۲۸۸۰ (۲) ۳۴۵۶ (۳) ۵۷۶ (۴) ۱۴۴ (۵)

موشی و پیشی مشغول بازی با n کلید و n لامپ هستند. می‌دانیم که لامپ‌ها رنگ‌هایی متمایز دارند و هر کدام، همواره در یکی از دو وضعیت خاموش و روشن هستند. کلیدها نیز از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند و با فشردن هر یک، لامپ متصل به آن کلید تغییر وضعیت می‌دهد. در ابتدای بازی، پیشی به طور دل‌خواه کلیدها را سیم‌کشی کرده و هر کدام از آن‌ها را به دقیقاً یک لامپ متصل می‌کند (ممکن است چند کلید به یک لامپ وصل شده باشند). سپس، موشی که از شیوه‌ی سیم‌کشی پیشی بی‌اطلاع است، در هر درخواست، دو تا از کلیدها را انتخاب و برای پیشی مشخص می‌کند. پیشی پس از گرفتن یک آب‌نبات از موشی، آن دو کلید را هم‌زمان فشار می‌دهد. با فشردن شدن هر کلیدی، لامپ متصل به آن تغییر وضعیت می‌دهد؛ ولی اگر دو کلید فشرده شده به یک لامپ متصل بوده باشند، وضعیت لامپ‌ها هیچ تغییری نمی‌کند. هدف موشی این است که بداند هر کلید به چه لامپی متصل شده است.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۱ اگر $n = ۸$ باشد و پیشی تضمین کند که همه‌ی لامپ‌ها در سیم‌کشی به کلیدی متصل شده‌اند، موشی حداقل به چند آب‌نبات نیاز دارد تا تحت هر شرایطی بتواند به هدفش برسد؟

۴ (۱) ۲ (هیچ‌کدام) ۶ (۳) ۷ (۴) ۵ (۵)

۱۲ اگر $n = ۵$ باشد و موشی مقدار نامحدودی آب‌نبات در اختیار داشته باشد، به ازای چند سیم‌کشی مختلف می‌تواند به هدفش برسد؟

۲۸۲۰ (۱) ۲۸۰۰ (۲) ۳۱۲۵ (۳) ۳۱۲۰ (۴) ۰ (۵)

پوپک و پرستو مشغول انجام یک بازی هستند. بازی آن‌ها به این صورت است که ابتدا پوپک یک عدد طبیعی مانند k را انتخاب می‌کند با این شرط که $1 \leq k \leq 20$. سپس پرستو سعی می‌کند عدد پوپک را حدس بزند. پرستو می‌تواند از پوپک تعدادی پرسش کند. در هر پرسش، پرستو یک عدد طبیعی مانند n را به پوپک می‌گوید و پوپک باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر k را به پرستو می‌گوید. هدف پرستو پیدا کردن عدد انتخاب شده توسط پوپک است.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

کم‌ترین تعداد پرسشی که پرستو بتواند در هر حالت، عدد پوپک را به درستی حدس بزند، چند است؟

۱۳

- ۵ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲ (۵)

اگر اعدادی که پرستو می‌تواند بپرسد، حداکثر ۲۰ باشند ($1 \leq n \leq 20$)، کم‌ترین تعداد پرسشی که پرستو بتواند در هر حالت، عدد پوپک را به درستی حدس بزند، چند است؟

۱۴

- ۱ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵)

در کشور سلطان، ۱۳ شهر با شماره‌های ۱ تا ۱۳ وجود دارد که بین بعضی جفت‌های آن‌ها جاده‌ی خاکی وجود دارد. می‌دانیم که از هر شهر می‌توان با طی کردن تعدادی جاده‌ی خاکی به هر شهر دیگر رفت. هم‌چنین می‌دانیم بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ هیچ جاده‌ی خاکی‌ای وجود ندارد. سلطان می‌خواهد تعدادی از جاده‌های خاکی کشورش را آسفالت کند طوری که کم‌ترین تعداد جاده آسفالت شوند و بتوان تنها با استفاده از جاده‌های آسفالت شده بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ مسافرت کرد. فرض کنید نقشه‌ی جاده‌های خاکی را نمی‌دانیم اما می‌دانیم کمینه‌ی تعداد جاده‌هایی که باید آسفالت شوند برابر با k است. با دانستن مقدار k ، نقشه‌ی جاده‌های آسفالت شده چند حالت متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

دو نقشه‌ی جاده‌های آسفالت شده را متفاوت در نظر می‌گیریم اگر دو شهر باشند که در یک نقشه، بین این دو شهر جاده‌ی آسفالت شده وجود داشته باشد و در نقشه‌ی دیگر خیر.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

جواب سوال را با فرض $k = 4$ به دست آورید.

۱۵

- ۲۷۰ (۱) ۵۴۰ (۲) ۱۰۸۰ (۳) ۸۱۰ (۴) ۱۳۵ (۵)

جواب سوال را با فرض $k = 12$ به دست آورید.

۱۶

- ۸۸ × ۱۰! (۱) ۸۵ × ۱۰! (۲) ۸۲ × ۱۰! (۳) ۵۵ × ۱۰! (۴) ۱۳۲ × ۱۰! (۵)

$2k$ نفر با شماره‌های ۱ تا $2k$ به ترتیب ساعت‌گرد دور یک دایره نشسته‌اند و می‌خواهند با یکدیگر بازی کنند. افراد ۱ تا k تیم اول، و افراد $k+1$ تا $2k$ تیم دوم را تشکیل می‌دهند. در ابتدا، تویی در دست نفر شماره‌ی ۱ است. در هر نوبت، فردی که توپ را در دست دارد، آن را به یکی از t نفر بعدی‌اش (در ترتیب ساعت‌گرد) می‌دهد. تیمی که بعد از n نوبت، توپ در دست یکی از اعضای آن باشد، برنده می‌شود. می‌گوییم به ازای مقادیر مشخص k, t, n ، یک تیم «استراتژی بُرد» دارد، اگر اعضای آن بتوانند در برابر هر شیوه‌ای از بازی تیم مقابل، طوری بازی کنند که حتماً برنده‌ی بازی شوند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ اگر $k = 2$ و $t = 2$ باشد، به ازای چند مقدار n از میان اعضای $\{5, 6, 10, 15\}$ ، تیم اول استراتژی بُرد دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲ (۵) ۳

۱۸ اگر $k = 10$ و $t = 2$ باشد، به ازای چند مقدار n از میان اعداد ۱ تا ۳۰، تیم اول استراتژی بُرد دارد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰ (۵) ۲۰

گرافی با ۱۴۰۱ رأس و ۱۴۰۱ یال داریم که رأس‌های آن با اعداد ۱ تا ۱۴۰۱ شماره‌گذاری شده‌اند. به ازای هر i ($1 \leq i \leq 1400$)، رأس‌های i و $i+1$ با یک یال به هم متصل هستند. رأس‌های با شماره‌های ۱ و ۱۴۰۱ نیز با یک یال به هم متصل هستند. به مجموعه‌ای از رأس‌ها مستقل گوییم اگر هیچ یالی بین رأس‌های آن وجود نداشته باشد. به مجموعه‌ی مستقل با بیش‌ترین اندازه، بزرگ‌ترین مجموعه مستقل گفته می‌شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۹ حداقل چند یال باید به گراف اضافه کنیم تا اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل آن حداقل یکی کم‌تر شود؟

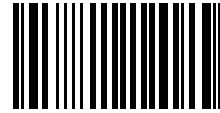
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۴ (۵) ۱

۲۰ حداقل چند یال باید به گراف اضافه کنیم تا اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل آن حداقل دو تا کم‌تر شود؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴ (۵) ۳



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سوال اول ۱۸ نمره

یک جدول با ۱۴۰۱ سطر و ۳ ستون داریم. به خانه‌های تلاقی مجموعه‌ای از سطرها متوالی و مجموعه‌ای از ستون‌های متوالی، یک زیرجدول می‌گوییم. در ابتدا ایمان به ازای هر سطر جدول، دقیقاً دو خانه از سه خانه را انتخاب می‌کند و داخل آن‌ها مهره قرار می‌دهد. سپس اسکندر در تعدادی حرکت، همه مهره‌های جدول را حذف می‌کند. او در هر حرکت، یک زیرجدول انتخاب می‌کند که تمام خانه‌های آن دارای مهره باشد و آن مهره‌ها را حذف می‌کند.

الف) ثابت کنید اسکندر همواره می‌تواند تمامی مهره‌ها را در حداکثر ۱۴۰۲ حرکت حذف کند. (۹ نمره)

ب) ثابت کنید ایمان می‌تواند در ابتدا طوری مهره‌ها را قرار دهد که اسکندر برای حذف همه‌ی آن‌ها حداقل ۱۴۰۲ حرکت لازم داشته باشد. (۹ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت به

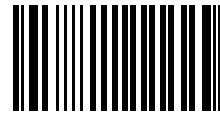
عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ

شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

سوال دوم ۱۸ نمره

در یک زندان، ۳۲ نفر با اسامی متمایز در ۳۲ سلول زندانی هستند. زندان بان زندان عوض شده و زندان بان جدید می خواهد لیستی از اسامی ۳۲ زندانی تهیه کند. او برای این کار با زندانی ها توافق می کند که این بازی را انجام دهند:

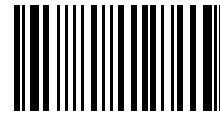
هر روز، ابتدا زندان بان دو سلول را انتخاب می کند؛ سپس با مراجعه به آن دو سلول، زندانی های هر کدام از آن دو سلول را می بیند و اگر هر یک از آن ها را قبلاً ندیده باشد، اسم آن فرد را هم به لیست خود اضافه می کند. همان شب و دور از چشم زندان بان، یکی از آن دو زندانی سلولش را با یکی از ۳۱ زندانی دیگر عوض می کند.

آیا زندان بان در هر شرایطی (به ازای تمام عملکردهای ممکن زندانی ها) می تواند در حداکثر ۱۰۲۴ روز، لیستی از اسامی همه ی زندانی ها را تهیه کند؟

توضیح: اگر پاسخ شما برای این سوال «بله» است، باید روشی برای زندان بان ارائه کنید که در حداکثر ۱۰۲۴ روز، لیست اسامی زندانی ها را تهیه کند. هم چنین اگر پاسخ شما برای این سوال «خیر» است، باید اثبات کنید به ازای هر الگوریتم زندان بان، حالتی وجود دارد که او به هدفش نرسد.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



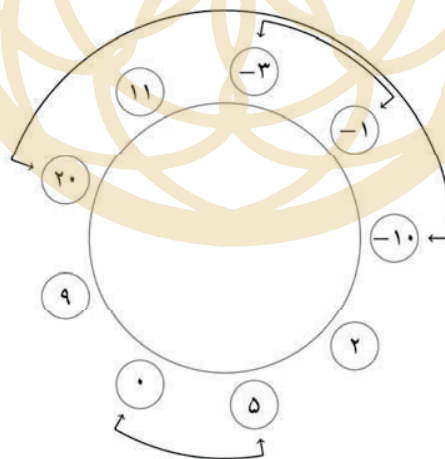
سوال سوم ۱۸ نمره

تعدادی عدد متمایز دور یک دایره داریم که در ابتدا همه ی آن ها سفید هستند. یک عدد را دره می گوییم، اگر از هر دو عدد مجاورش کوچک تر باشد. هم چنین یک عدد را قله می نامیم، اگر از هر دو عدد مجاورش بزرگ تر باشد.

روی اعداد به ترتیب از کوچک به بزرگ، عملیات زیر را انجام می دهیم:

باشگاه المپیاد طلایی ها

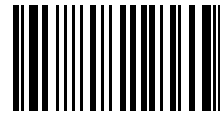
- اگر دره است، آن را سیاه می کنیم.
 - اگر قله است، از این عدد به دو جهت حرکت می کنیم تا به اولین دره ی سیاه برسیم و از میان این دو دره ی سیاه عدد بزرگ تر را انتخاب کرده و با قله ی مذکور جفت می کنیم و دره ای که جفت شده را قرمز می کنیم. (اگر از دو جهت به یک دره ی سیاه یکسان رسیدیم، همان را انتخاب می کنیم).
 - در غیر این صورت، کاری انجام نمی دهیم.
- به این ترتیب، در نهایت دره ها و قله ها به جفت هایی افزای می شوند. در شکل زیر، افزای حاصل از اجرای الگوریتم در یک نمونه آمده است.



حال، هر عدد را با قرینه اش جایگزین کرده و الگوریتم گفته شده را با اعداد جدید اجرا می کنیم. ثابت کنید دو عدد در اجرای دوم الگوریتم جفت می شوند، اگر و تنها اگر اعداد متناظرشان (قرینه هایشان) در اجرای اول الگوریتم جفت شده باشند.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

سوال چهارم ۲۶ نمره

فرض کنید n یک عدد طبیعی، و A زیرمجموعه‌ای از $\{1, 2, \dots, n-1\}$ باشد. در یک درخت n رأسی، یک مسیر را A -پسند گوئیم، اگر طول (تعداد یال‌های) آن عضوی از A باشد. $f(n, A)$ را بیشینه‌ی تعداد مسیرهای A -پسند در میان تمام درخت‌های n رأسی در نظر بگیرید. برای مثال:

$$f(5, \{1, 2, 4\}) = 10 \quad \text{و} \quad f(5, \{1, 4\}) = 5$$

باشگاه المپیاد طلایی‌ها

الف) $f(2022, \{3, 4, 5, \dots, 1401\})$ را بیابید. (۸ نمره)

ب) $f(2022, \{3, 5, 7, \dots, 1399, 1401\})$ را بیابید. (۵ نمره)

پ) $f(2022, \{1401\})$ را بیابید. (۱۳ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت به

عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ

شرایطی تصحیح نخواهد شد

مرحله‌ی دوم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

- آزمون ۲۰ سوال دارد و مدت زمان آن ۲۱۰ دقیقه است.
- سوالات ۱۱ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.

۱ آقای مدیر در راستای صیانت از محیط زیست، رفته بود کلنگ احداث کارخانه‌ای در جوار تالاب پایان‌کاله را بزند که با پشه روبه‌رو شد. آقای مدیر به اصرار پشه برای نیش زدن پاسخ منفی داد اما به او گفت: مسئله‌ای داریم که اگر حل شود، دستور می‌دهم مشکل معیشت شما را هم برطرف کنند. ما در این جا یک زمین داریم که به شکل یک جدول ۲۰۲۲×۱۴۰۱ است. در حال حاضر، همه‌ی خانه‌های این جدول را آب گرفته. می‌خواهیم تعدادی از خانه‌های جدول را خشک کنیم طوری که به ازای هر زیرمستطیل با بیش از یک خانه در این جدول، حداقل نصف خانه‌های آن زیرمستطیل خشک شده باشند. در راستای حمایت از جمعیت هم‌نوعان، پشه می‌خواهد تعداد خانه‌های خشک شده کمینه باشد. حداقل چند خانه از جدول باید خشک شوند؟

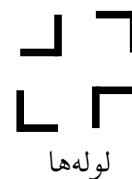
(۱) ۲۱۲۴۱۱۱ (۲) ۲۱۲۴۶۱۶ (۳) ۱۸۸۸۵۴۸ (۴) ۱۴۱۶۴۱۱ (۵) ۹۴۴۲۷۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□

۲ پشمک یک جدول ۱۰×۴ همانند شکل زیر دارد و می‌خواهد تعدادی لوله‌ی I-شکل در خانه‌های این جدول قرار دهد طوری که هر لوله داخل یک خانه قرار بگیرد و با طی کردن تعدادی لوله، از یکی از اضلاع خانه‌ی A به یکی از اضلاع خانه‌ی B مسیر وجود داشته باشد. پشمک دوست دارد محیط‌زیست است و می‌خواهد با کم‌ترین تعداد لوله این کار را انجام دهد. پشمک به چند طریق می‌تواند تعدادی لوله در این جدول قرار دهد طوری که تعداد لوله‌ها کمینه باشد و از A به B مسیر وجود داشته باشد؟ یک نمونه از لوله‌گذاری که در آن از ضلع راست A به ضلع پایین B مسیر وجود دارد، در جدول زیرین آمده است. دقت کنید که تعداد لوله‌ها در این مثال لزوماً کمینه نیست.

									B
A									



									B
A									

یک نمونه از لوله‌گذاری با ۱۷ لوله

۶۸ (۵)

۷۶ (۴)

۴۶ (۳)

۴۲ (۲)

۵۸ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

سه نفر با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ دور دایره نشسته‌اند و با هم بازی می‌کنند. هر نفر دو کارت دارد که شماره‌ی افراد دیگر به جز خودش روی آن‌ها نوشته شده است. بازی از فرد با شماره‌ی ۱ شروع می‌شود. هر نفر در نوبت خود، از میان کارت‌هایی که در حال حاضر در اختیار دارد، یک کارت را به صورت تصادفی (با احتمال یکسان) انتخاب می‌کند و نوبت را به فردی که شماره‌اش روی کارت منتخب آمده است می‌دهد و آن کارت را دور می‌اندازد. بازی زمانی پایان می‌یابد که فردی که نوبتش است، هیچ کارتی نداشته باشد. پس از پایان بازی، امید ریاضی تعداد کل کارت‌های دور انداخته شده چه قدر است؟

۴ (۵)

$\frac{11}{2}$ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

$\frac{9}{2}$ (۱)

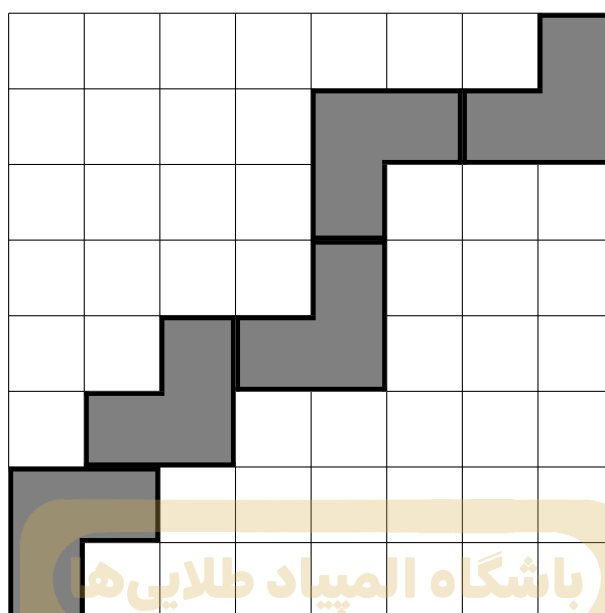
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

در مغازه‌ی آقا جلال، کاشی‌هایی به شکل  فروخته می‌شود. یک جدول 8×8 داریم. می‌خواهیم تعدادی کاشی بخریم و آن‌ها را طوری در جدول قرار دهیم که کاشی‌کاری معتبر باشد. یک کاشی‌کاری معتبر است اگر همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد:

- هیچ دو کاشی‌ای هم‌پوشانی نداشته باشند.
- خانه‌های پایین-چپ و بالا-راست جدول حتماً کاشی‌کاری شده باشند.
- تنها با حرکت روی خانه‌های کاشی‌کاری شده‌ی جدول، بتوان از خانه‌ی پایین-چپ جدول شروع کرد، در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور ضلعی رفت، و در انتها به خانه‌ی بالا-راست جدول رسید.

با توجه به قیمت بالای کاشی‌های مغازه‌ی آقا جلال، می‌خواهیم تعداد کاشی‌هایی که می‌خریم کمینه باشد. به چند طریق می‌توان جدول را به صورت معتبر و با کم‌ترین تعداد کاشی ممکن کاشی‌کاری کرد؟ لازم به ذکر است که دو کاشی‌کاری متفاوتند اگر و تنها اگر یک خانه از جدول وجود داشته باشد که فقط در یکی از این دو حالت کاشی‌کاری شده باشد. در شکل زیر، یک نمونه کاشی‌کاری معتبر نمایش داده شده است. توجه کنید که تعداد کاشی‌ها در این نمونه لزوماً کمینه نیست.



۱۹۲ (۵)

۹۶ (۴)

۱۲۸ (۳)

۲۵۶ (۲)

۲۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۵ دنباله‌ای از سیاه‌چاله‌ها در یک ردیف و به ترتیب با اندازه‌های «۳, ۱, ۵, ۲, ۳, ۵, ۸, ۲, ۳, ۲, ۸, ۴, ۵» در فضا قرار گرفته‌اند. می‌دانیم با ادغام تعدادی سیاه‌چاله، یک سیاه‌چاله‌ی جدید با اندازه‌ای برابر با مجموع اندازه‌ی سیاه‌چاله‌های اولیه به دست می‌آید. حال می‌خواهیم یک بازه‌ی متوالی از یک یا چند سیاه‌چاله را انتخاب کنیم و با ادغامشان یک سیاه‌چاله‌ی بزرگ بسازیم؛ سپس تا جایی که اندازه‌ی سیاه‌چاله‌مان از اندازه‌ی یکی از سیاه‌چاله‌های همسایه (راست یا چپ) بزرگ‌تر یا مساوی است، آن را با ادغام با سیاه‌چاله‌ی همسایه، بزرگ‌تر کنیم. چند بازه‌ی متوالی متمایز از دنباله‌ی سیاه‌چاله‌ها وجود دارد که در صورت انتخاب برای ادغام اولیه، می‌توان با این فرایند همه‌ی سیاه‌چاله‌ها را با هم ادغام کرد؟

۷۶ (۵)

۸۲ (۴)

۷۸ (۳)

۸۴ (۲)

۸۰ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

□

۶ جک یک عدد ۹ رقمی دارد که می‌خواهد آن را «پالایش» کند. فرایند پالایش به این صورت است که در هر مرحله، ارقام عدد فعلی به کم‌ترین تعداد بازه‌ی متوالی تقسیم می‌شوند طوری که ارقام در هر بازه یکسان باشند. سپس برای ایجاد عدد جدید (جایگزین عدد فعلی)، به ازای هر یک از این بازه‌ها به ترتیب از چپ به راست، طول آن‌ها (تعداد ارقام در هر بازه) نوشته می‌شود. برای مثال، عدد ۱۲۲۳۱۸۸۸۸ بعد از یک مرحله پالایش به عدد ۱۲۱۱۴ تبدیل می‌شود. جک فرایند پالایش را تا وقتی که به یک عدد یک رقمی برسد ادامه می‌دهد. عدد یک رقمی نهایی

مرحله‌ی دوم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟ در مثال زیر، فرایند پالایش عدد ۱۲۲۳۱۸۸۸۸ را مشاهده می‌کنید که به عدد ۲ ختم می‌شود.

$$۱۲۲۳۱۸۸۸۸ \rightarrow ۱۲۱۱۴ \rightarrow ۱۱۲۱ \rightarrow ۲۱۱ \rightarrow ۱۲ \rightarrow ۱۱ \rightarrow ۲$$

۶ (۵)

۴ (۴)

۵ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

یک گراف ساده و همبند ۱۱ رأسی داریم که می‌توان از هر رأس آن با طی حداکثر ۵ یال به هر رأس دیگر رسید. از طرفی دو رأس در این گراف وجود دارند که برای رسیدن از یکی به دیگری طی کردن حداقل ۵ یال لازم است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۳۰ (۵)

۲۶ (۴)

۲۵ (۳)

۲۰ (۲)

۳۲ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

کلاه قرمزی یک جدول ۱۰×۱۰ دارد که سطرها و ستون‌های آن از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده‌اند و در هر خانه‌ی آن دقیقاً یک سوراخ وجود دارد. بچه‌ی فامیل دور که ۸ تپله دارد، این جدول را پیدا کرده است. او به ازای هر تپله، یکی از خانه‌های جدول را به صورت تصادفی با احتمال یکسان انتخاب می‌کند و تپله را در سوراخ آن خانه می‌اندازد (امکان دارد در سوراخ یک خانه، چندین تپله قرار بگیرد). حال اگر تعداد تپله‌های واقع در سوراخ خانه‌ی تقاطع سطر i و ستون j را با $c_{i,j}$ نمایش دهیم، زیبایی جدول با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} i \times j \times (c_{i,j})^2$$

امید ریاضی زیبایی جدول پس از انداختن ۸ تپله چه قدر است؟

$\frac{25047}{100}$ (۵)

۱۹۳۶ (۴)

$\frac{16767}{100}$ (۳)

$\frac{12947}{50}$ (۲)

$\frac{8667}{50}$ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

یک گراف (G) رأسی داریم که هر رأس آن متناظر با یک رشته‌ی دودویی به طول ۲۶ با ۲۰ رقم صفر و ۶ رقم یک است. در این گراف، بین دو رأس متفاوت، یال (بدون جهت) می‌گذاریم اگر و تنها اگر رشته‌ی متناظر با یکی از آن‌ها با یک «شیفت دوری»، قابل تبدیل به رشته‌ی متناظر با رأس دیگر باشد. عملیات شیفت دوری روی یک رشته‌ی دودویی را این‌گونه تعریف می‌کنیم که راست‌ترین رقم رشته را حذف، و آن را در چپ‌ترین جایگاه رشته اضافه می‌کنیم. برای مثال، شیفت دوری رشته‌ی ۱۰۰۰۱۰۱، رشته‌ی ۱۱۰۰۰۱۰ را نتیجه می‌دهد. تعداد مؤلفه‌های همبندی این گراف را بشمارید.

مرحله‌ی دوم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

۸۸۶۶ (۵)

۸۸۹۹ (۴)

۸۸۸۸ (۳)

۸۸۷۷ (۲)

۸۸۵۵ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۱۰ به یک جایگشت از اعداد ۱ تا ۱۰ ملایم می‌گوییم اگر حاصل ضرب هر دو عدد متوالی در جایگشت، حداکثر ۳۰ شود. چند جایگشت ملایم از اعداد ۱ تا ۱۰ داریم؟

۱۴۴ (۵)

۵۷۶ (۴)

۳۴۵۶ (۳)

۲۸۸۰ (۲)

۱۷۲۸ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

باشگاه المپیاد طلایی‌ها

موشی و پیشی مشغول بازی با n کلید و n لامپ هستند. می‌دانیم که لامپ‌ها رنگ‌هایی متمایز دارند و هر کدام، همواره در یکی از دو وضعیت خاموش و روشن هستند. کلیدها نیز از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند و با فشردن هر یک، لامپ متصل به آن کلید تغییر وضعیت می‌دهد. در ابتدای بازی، پیشی به طور دل‌خواه کلیدها را سیم‌کشی کرده و هر کدام از آن‌ها را به دقیقاً یک لامپ متصل می‌کند (ممکن است چند کلید به یک لامپ وصل شده باشند). سپس، موشی که از شیوه‌ی سیم‌کشی پیشی بی‌اطلاع است، در هر درخواست، دو تا از کلیدها را انتخاب و برای پیشی مشخص می‌کند. پیشی پس از گرفتن یک آب‌نبات از موشی، آن دو کلید را هم‌زمان فشار می‌دهد. با فشردن شدن هر کلیدی، لامپ متصل به آن تغییر وضعیت می‌دهد؛ ولی اگر دو کلید فشرده شده به یک لامپ متصل بوده باشند، وضعیت لامپ‌ها هیچ تغییری نمی‌کند. هدف موشی این است که بداند هر کلید به چه لامپی متصل شده است.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۱ اگر $n = ۸$ باشد و پیشی تضمین کند که همه‌ی لامپ‌ها در سیم‌کشی به کلیدی متصل شده‌اند، موشی حداقل به چند آب‌نبات نیاز دارد تا تحت هر شرایطی بتواند به هدفش برسد؟

۵ (۵)

۷ (۴)

۶ (۳)

هیچ‌کدام (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۱۲ اگر $n = ۵$ باشد و موشی مقدار نامحدودی آب‌نبات در اختیار داشته باشد، به ازای چند سیم‌کشی مختلف می‌تواند به هدفش برسد؟

۰ (۵)

۳۱۲۰ (۴)

۳۱۲۵ (۳)

۲۸۰۰ (۲)

۲۸۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

□

پوپک و پرستو مشغول انجام یک بازی هستند. بازی آن‌ها به این صورت است که ابتدا پوپک یک عدد طبیعی مانند k را انتخاب می‌کند با این شرط که $1 \leq k \leq 20$. سپس پرستو سعی می‌کند عدد پوپک را حدس بزند. پرستو می‌تواند از پوپک تعدادی پرسش کند. در هر پرسش، پرستو یک عدد طبیعی مانند n را به پوپک می‌گوید و پوپک باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر k را به پرستو می‌گوید. هدف پرستو پیدا کردن عدد انتخاب شده توسط پوپک است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۳ کم‌ترین تعداد پرسشی که پرستو بتواند در هر حالت، عدد پوپک را به درستی حدس بزند، چند است؟

- ۵ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

۱۴ اگر اعدادی که پرستو می‌تواند بپرسد، حداکثر ۲۰ باشند ($1 \leq n \leq 20$)، کم‌ترین تعداد پرسشی که پرستو بتواند در هر حالت، عدد پوپک را به درستی حدس بزند، چند است؟

- ۱ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

در کشور سلطان، ۱۳ شهر با شماره‌های ۱ تا ۱۳ وجود دارد که بین بعضی جفت‌های آن‌ها جاده‌ی خاکی وجود دارد. می‌دانیم که از هر شهر می‌توان با طی کردن تعدادی جاده‌ی خاکی به هر شهر دیگر رفت. هم‌چنین می‌دانیم بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ هیچ جاده‌ی خاکی‌ای وجود ندارد. سلطان می‌خواهد تعدادی از جاده‌های خاکی کشورش را آسفالت کند طوری که کم‌ترین تعداد جاده آسفالت شوند و بتوان تنها با استفاده از جاده‌های آسفالت شده بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ مسافرت کرد. فرض کنید نقشه‌ی جاده‌های خاکی را نمی‌دانیم اما می‌دانیم کمینه‌ی تعداد جاده‌هایی که باید آسفالت شوند برابر با k است. با دانستن مقدار k ، نقشه‌ی جاده‌های آسفالت شده چند حالت متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

دو نقشه‌ی جاده‌های آسفالت شده را متفاوت در نظر می‌گیریم اگر دو شهر باشند که در یک نقشه، بین این دو شهر جاده‌ی آسفالت شده وجود داشته باشد و در نقشه‌ی دیگر خیر.

مرحله‌ی دوم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۵ جواب سوال را با فرض $k = 4$ به دست آورید.

- (۱) ۲۷۰ (۲) ۵۴۰ (۳) ۱۰۸۰ (۴) ۸۱۰ (۵) ۱۳۵

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

۱۶ جواب سوال را با فرض $k = 12$ به دست آورید.

- (۱) $88 \times 10!$ (۲) $85 \times 10!$ (۳) $82 \times 10!$ (۴) $55 \times 10!$ (۵) $132 \times 10!$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□

$2k$ نفر با شماره‌های ۱ تا $2k$ به ترتیب ساعت‌گرد دور یک دایره نشسته‌اند و می‌خواهند با یکدیگر بازی کنند. افراد ۱ تا k تیم اول، و افراد $k+1$ تا $2k$ تیم دوم را تشکیل می‌دهند. در ابتدا، توپی در دست نفر شماره‌ی ۱ است. در هر نوبت، فردی که توپ را در دست دارد، آن را به یکی از t نفر بعدی‌اش (در ترتیب ساعت‌گرد) می‌دهد. تیمی که بعد از n نوبت، توپ در دست یکی از اعضای آن باشد، برنده می‌شود. می‌گوییم به ازای مقادیر مشخص k, t, n ، یک تیم «استراتژی بُرد» دارد، اگر اعضای آن بتوانند در برابر هر شیوه‌ای از بازی تیم مقابل، طوری بازی کنند که حتماً برنده‌ی بازی شوند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۷ اگر $k = 2$ و $t = 2$ باشد، به ازای چند مقدار n از میان اعضای $\{5, 6, 10, 15\}$ ، تیم اول استراتژی برد دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲ (۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۱۸ اگر $k = 10$ و $t = 2$ باشد، به ازای چند مقدار n از میان اعداد ۱ تا ۳۰، تیم اول استراتژی برد دارد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰ (۵) ۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

گرافی با ۱۴۰۱ رأس و ۱۴۰۱ یال داریم که رأس‌های آن با اعداد ۱ تا ۱۴۰۱ شماره‌گذاری شده‌اند. به ازای هر i ($1 \leq i \leq 1400$)، رأس‌های i و $i+1$ با یک یال به هم متصل هستند. رأس‌های با شماره‌های ۱ و ۱۴۰۱ نیز با یک یال به هم متصل هستند. به مجموعه‌ای از رأس‌ها مستقل گوییم اگر هیچ یالی بین رأس‌های آن وجود نداشته باشد. به مجموعه‌ی مستقل با بیش‌ترین اندازه، بزرگ‌ترین مجموعه مستقل گفته می‌شود.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۹ حداقل چند یال باید به گراف اضافه کنیم تا اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل آن حداقل یکی کم‌تر شود؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۱ (۵)

باشگاه المپیاد طلایی‌ها

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

۲۰ حداقل چند یال باید به گراف اضافه کنیم تا اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل آن حداقل دو تا کم‌تر شود؟

- ۷ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□