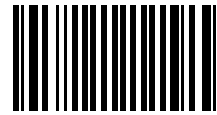




نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

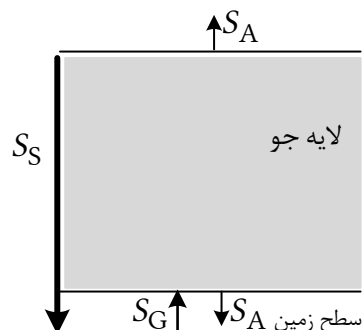


سازمان ملی پرورش استعدادی در شان

(۱) نیمی از جایزه نوبل سال ۲۰۲۱ به پژوهشگرانی اهدا شد که اقلیم زمین را مدل سازی کرده بودند. چنین مدل هایی متغیرهای بسیاری دارد و به طور معمول به سبب پیچیدگی شان، حل آنها نیازمند محاسبات و شبیه سازی های رایانه ای است.

در این مسئله می خواهیم با مدلی بسیار ساده، پدیده گرمایش زمین بر اثر وجود لایه های جو را بررسی کنیم. برای این که بتوانیم مدل را تحلیل کنیم، نیاز به ساده سازی های فراوانی داریم. برای مثال سطح وسیعی از زمین را اقیانوس ها پوشانده اند که تأثیر به سزایی در اقلیم دارند، اما در این مسئله اثر اقیانوس ها را کنار می گذاریم. همچنین اثر شب و روز را در نظر نمی گیریم. هر چند نتیجه کمی این مدل ساده با واقعیت تفاوت دارد، اما نقطه شروع خوبی برای مدل های واقعی تر است.

مهم ترین منبع انرژی زمین، خورشید است. شدت نور خورشید در سطح زمین بر حسب بسامد متغیر است. کمیت شدت عبارت است از انرژی که در واحد زمان بر واحد سطح می تابد. شدت متوسط نور خورشید در سطح زمین را با S_0 نشان می دهیم. تابش خورشید به طور عمده در بسامدهایی صورت می گیرد که بدون جذب به طور کامل از تمامی لایه های جو عبور می کند، به زمین می رسد و به طور کامل توسط زمین جذب می شود.

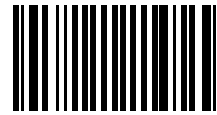


شکل ۱

شدت تابش گرمایی هر جسم در دمای T در محل جسم برابر با $S_0 = kT^4$ است که در آن k ثابت است. در این مسئله ثابت k را برای زمین و لایه های جو یکسان می گیریم. اگر زمین جو نداشت، در دمای ثابت، یعنی در حالت تعادل گرمایی، شدت متوسط دریافتی توسط زمین از سوی خورشید، با شدت



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



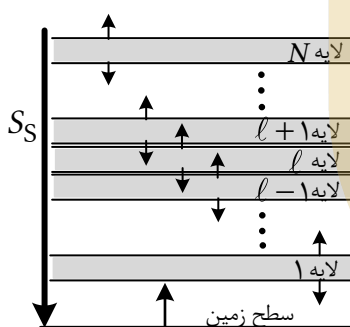
سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

تابشی زمین برابر بود. در این حالت دمای زمین را با T_B نشان می دهیم و داریم $S_S = kT_B^4$. در هر جای مسئله که به شدت نور خورشید در سطح زمین احتیاج داشتید از این رابطه استفاده کنید.

آ) مطابق شکل ۱ جو زمین را تک لایه ای فرض کنید. در این وضعیت دمای زمین را با T_G و دمای لایه جو را با

T_A نشان می دهیم. این لایه با شدت یکسان $S_A = kT_A^4$ هم به سمت زمین و هم به سمت فضا تابش دارد.

همچنین فرض کنید تمام تابش لایه که به سمت زمین است توسط زمین جذب می شود و تمام تابش زمین نیز توسط لایه جو جذب می شود. با فرض تعادل گرمایی و ثابت بودن دمای زمین و لایه، T_G و T_A را بر حسب T_B به دست آورید.



شکل ۲

حال فرض کنید که مطابق شکل ۲ جو زمین از N لایه مجزا تشکیل شده باشد.

مانند قبل تمام نور خورشید بدون جذب شدن از همه لایه ها عبور می کند، به زمین می رسد و به طور کامل توسط آن جذب می شود. این مجموعه در حال تعادل گرمایی است و دمای تمام اجزای آن ثابت است. دمای زمین را با T_E و

دمای لایه ℓ ام را با T_ℓ نشان می دهیم. تابش گرمایی زمین به طور کامل توسط

لایه اول جذب می شود. تابش لایه اول به سمت زمین به طور کامل توسط زمین جذب می شود. لایه نوعی ℓ ام با

شدت یکسان kT_ℓ^4 به لایه های $\ell-1$ و $\ell+1$ تابش می کند که به طور کامل توسط آن ها جذب می شود. لایه N

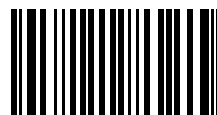
ام نیز مشابه سایر لایه ها هم به سمت فضا و هم به سمت لایه $N-1$ تابش می کند.

ب) معادله های تعادل گرمایی را برای زمین، لایه ℓ ام ($1 \leq \ell < N$) و لایه N ام بنویسید.





نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

پ) T_N را بر حسب T_B به دست آورید.

ت) T_ℓ را بر حسب T_B ، N و ℓ به دست آورید.

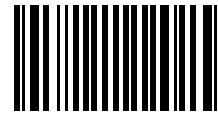
ث) T_E را بر حسب T_B و N به دست آورید.

باشگاه المپیاد طلایی‌ها

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد

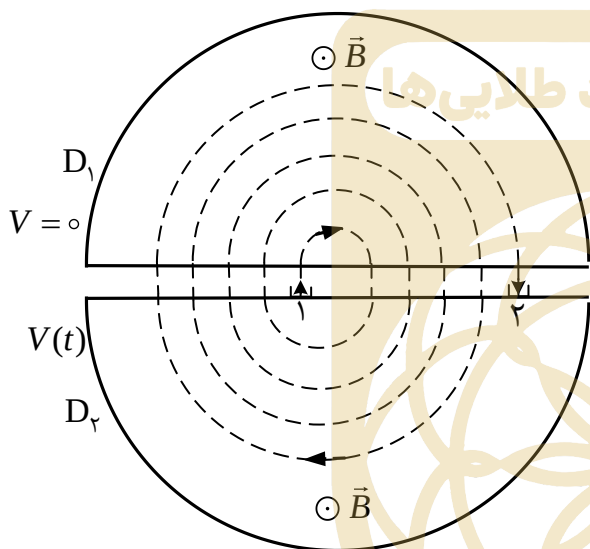


نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادی درمشان

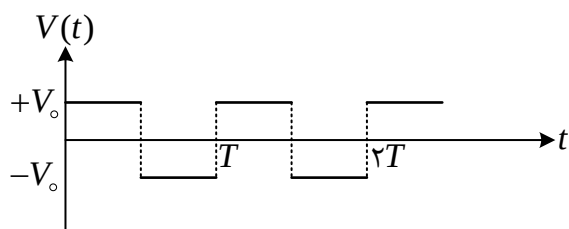
(۲) یک بار الکتریکی متحرک q در میدان مغناطیسی یکنواخت B حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. صفحه دایره عمود بر امتداد B است. با به کار بردن قانون دوم نیوتن دوره چرخش این حرکت دایره‌ای را بر حسب m ، q و B به دست آورید.



شکل ۱

حال می‌خواهیم فرایند شتاب دادن ذرات باردار در دستگاهی موسوم به سیکلوترون را در چارچوب فیزیک نیوتونی بررسی کنیم. شتاب‌دهنده سیکلوترون دستگاهی مطابق شکل ۱ است که دارای دو رسانای نیم‌استوانه‌ای توخالی با مقطعی به شکل حرف انگلیسی D است. این دو رسانا را D_1 و D_2 می‌نامیم. فاصله قسمت تخت D_1 و D_2 از یکدیگر برابر S است. قسمت

تخت هر دو آن‌ها به صورت توری است به طوری که یک ذره باردار می‌تواند از آن عبور کند. رسانای D_1 همواره دارای پتانسیل الکتریکی صفر است و رسانای D_2 به پتانسیل الکتریکی $V(t)$ مطابق نمودار شکل ۲ متصل است.



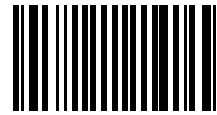
شکل ۲

این پتانسیل الکتریکی با دوره تناوب T به صورت زیر است.





نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



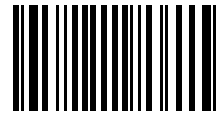
سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

$$V(t) = \begin{cases} +V_0, & nT < t < nT + \frac{T}{2}, \\ -V_0, & nT + \frac{T}{2} < t < nT + T \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

به این ترتیب در شکاف بین D_1 و D_2 ، یعنی در فاصله S ، یک میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شود که به طور متناوب جهت آن معکوس می‌شود، اما داخل D ها میدان الکتریکی صفر است. هم‌چنین مطابق شکل ۱ میدان مغناطیسی برون‌سوی B عمود بر سطح مقطع D ها وجود دارد. در این شتاب‌دهنده ابتدا ذره‌ای با جرم m و بار الکتریکی مثبت q از نقطه ۱ روی D_2 در لحظه $t = 0$ از حالت سکون به دلیل پتانسیل الکتریکی $+V_0$ شتاب می‌گیرد تا به قسمت تخت D_1 برسد. این ذره داخل D_1 می‌رود و بر اثر میدان مغناطیسی داخل آن می‌چرخد و دوباره به قسمت تخت D_1 برمی‌گردد. قبل از این که ذره به این نقطه برسد پتانسیل الکتریکی D_2 برابر $-V_0$ شده است و ذره خارج شده از D_1 مجدداً شتاب می‌گیرد تا به قسمت تخت D_2 برسد و داخل آن برود. در داخل D_2 ذره بر اثر میدان مغناطیسی می‌چرخد و دوباره به قسمت تخت D_2 برمی‌گردد. قبل از این که ذره به این نقطه برسد پتانسیل الکتریکی D_2 دوباره $+V_0$ شده است و ذره خارج شده از D_2 مجدداً به سمت D_1 شتاب می‌گیرد و این فرایند تکرار می‌شود (شکل ۱). با توجه به محدود بودن دفعات چرخش و اندازه شکاف S ، ذره همواره در شکاف بین D ها حرکت تندشونده دارد. اثر میدان مغناطیسی در شکاف بین دو رسانا را ناچیز بگیرید به طوری که مسیر حرکت ذره در شکاف بین D ها همواره عمود بر سطح تخت D ها است. توجه کنید که تغییر علامت پتانسیل تقریباً به طور لحظه‌ای صورت می‌گیرد و قبل و بعد از این لحظه سرعت ذره یکسان است. فرض کنید دوره تناوب T در شکل ۲، برابر با دوره چرخش ذره باردار بخش آ است.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

(ب) بعد از k بار عبور از شکاف بین D ها، سرعت ذره را بر حسب k, m, q و V_0 به دست آورید.

(پ) بعد از k بار عبور از شکاف بین D ها، شعاع چرخش ذره در میدان مغناطیسی را بر حسب k, m, q, B و V_0 به دست آورید.

(ت) فرض کنید بعد از k بار عبور از شکاف بین D ها، مطابق شکل ۱، ذره به نقطه ۲ روی D_2 برسد. زمان رسیدن ذره به نقطه ۲، t ، را بر حسب k, m, q, B, V_0 و S به دست آورید.

(ث) کل مسافتی که ذره در قسمت T طی می کند، l ، را بر حسب k, m, q, B, V_0 و S به دست آورید.

(ج) حداکثر مقدار S چقدر باشد تا در تمام k بار عبور ذره از شکاف، حرکت تندشونده باشد؟

(چ) با فرض $\frac{m}{q} = 1.04 \times 10^{-8} \text{ kg/C}$ ، $V_0 = 500 \text{ kV}$ ، $S = 200 \text{ mm}$ ، $q = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ و

$B = 1.04 \text{ T}$ اگر بخواهیم انرژی جنبشی ذره وقتی به نقطه ۲ می رسد 250 MeV باشد، مقادیر k ، t و l را

به دست آورید. در این جا، برای k های بزرگ از رابطه تقریبی $\sum_{i=1}^k \sqrt{i} \cong \frac{2}{3} \sqrt{k^3} + \frac{1}{2} \sqrt{k}$ می توانید استفاده

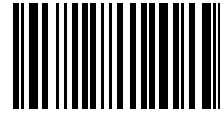
کنید.

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد

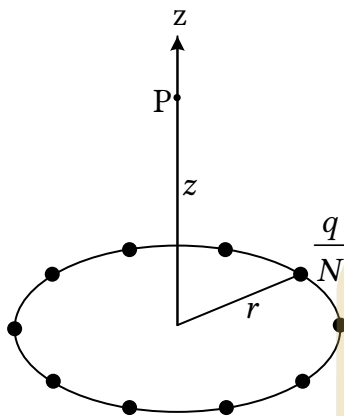




نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادی در شان



شکل ۱

(۳) آ) بار الکتریکی q را به N قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم و آن‌ها را مطابق شکل ۱ بر روی رئوس یک N ضلعی منتظم که در دایره‌ای به شعاع r محاط است قرار داده‌ایم. محور تقارن دستگاه بر صفحه دایره عمود است و از مرکز آن می‌گذرد. مقدار و جهت میدان الکتریکی در نقطه P واقع بر محور تقارن دستگاه و به فاصله z از مرکز دایره را به دست آورید. برای سهولت می‌توانید N را زوج فرض کنید.

ب) حلقه‌ای به شعاع r در نظر بگیرید که بار الکتریکی q به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. به کمک بخش آ میدان الکتریکی این حلقه را در نقطه‌ای به فاصله z از مرکز حلقه بر روی محور آن به دست آورید.

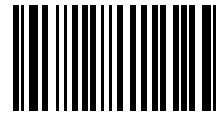
پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای به فاصله D از یک بار نقطه‌ای q نسبت به مبدأ دوردست برابر $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 D}$ است. پتانسیل الکتریکی مجموعه‌ای از بارها جمع جبری پتانسیل الکتریکی آن‌ها است.

پ) پتانسیل الکتریکی حلقه‌ای به شعاع r و بار الکتریکی q در نقطه‌ای بر روی محور آن و به فاصله z از مرکز حلقه را به دست آورید.

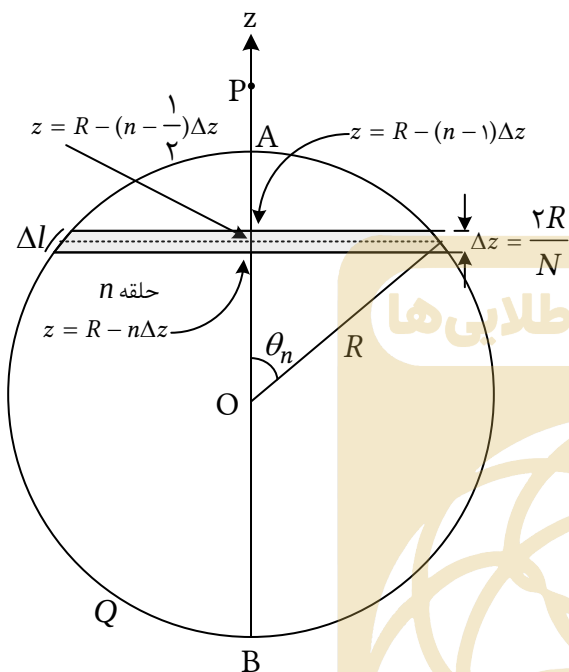
مطابق شکل ۲، یک پوسته کروی به شعاع R در نظر بگیرید که بار الکتریکی Q به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. نقطه P واقع بر محور z و به فاصله d ($d > R$) از مرکز کره است. مبدأ مختصات را در مرکز کره بگیرید. بازه بین نقاط A به مختصه $z = R$ و B به مختصه $z = -R$ را به N قسمت مساوی تقسیم کنید.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادی در شان



شکل ۲

از هر نقطه تقسیم، صفحه‌ای فرضی عمود بر محور z در نظر

بگیرید. فاصله هر دو صفحه متوالی از هم $\Delta z = 2R/N$

است. هر صفحه، کره را در یک دایره قطع می‌کند. در میان

هر دو صفحه فرضی متوالی باریکه‌ای از سطح کره قرار

می‌گیرد. اگر N به اندازه کافی بزرگ باشد هر کدام از

باریکه‌های یاد شده مشابه حلقه بخش b خواهد بود. حلقه

n ام را بین صفحات $z = R - (n-1)\Delta z$ و $z = R - n\Delta z$ در

نظر بگیرید. مرکز حلقه n ام روی محور z در نقطه

$z = R - (n - \frac{1}{2})\Delta z$ است. زاویه θ_n مربوط به حلقه n ام

در شکل ۲ مشخص شده است.

(ت) کمیت $\cos \theta_n$ را بر حسب n و N به دست آورید و از این پس آن را معلوم فرض کنید.

(ث) مساحت حلقه n ام و بار الکتریکی روی آن را به دست آورید.

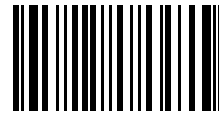
راهنمایی: سطح هر حلقه را می‌توان تقریباً مشابه سطح نواری مستطیل شکل به عرض Δl در نظر گرفت.

(ج) از برهم‌نهی میدان الکتریکی حلقه‌ها، میدان الکتریکی کره را در نقطه P به صورت یک جمع روی شمارنده

n بر حسب Q ، R ، d و θ_n ها به دست آورید.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادی درمیان

چ) به روش مشابه، پتانسیل الکتریکی پوسته کروی شکل ۲ در نقطه P را به صورت یک جمع روی شمارنده n بر حسب Q ، R ، d و θ_n ها به دست آورید.

ح) فرض کنید پاسخ بخش های ج و چ برای میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی به صورت زیر باشد،

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2 N} \sum_{n=1}^N f(x_n, \alpha), \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d N} \sum_{n=1}^N g(x_n, \alpha)$$

که در آن $\alpha = R/d$ و $x_n = \cos \theta_n$ فرض شده اند. توابع $f(x, \alpha)$ و $g(x, \alpha)$ را بنویسید. برای $\alpha = \frac{1}{3}$ شکل تقریبی این دو تابع را رسم کنید. برای این کار توجه کنید که مشتق اول و دوم هر دو تابع مثبت هستند. بنابراین کافی است مقدار توابع یاد شده را در ابتدا و انتهای بازه مجاز و در $x=0$ به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به

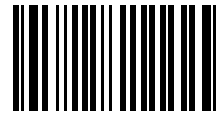
عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ

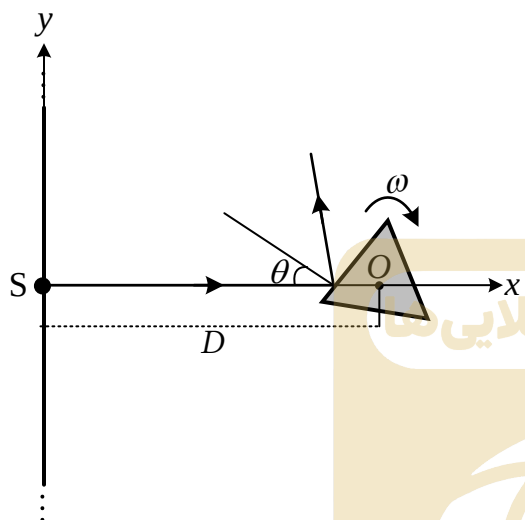
شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادی در شان



۴) باریکه‌ای از نور مطابق شکل از چشمه S در راستای محور

x به سمت راست منتشر می‌شود. امتداد باریکه از نقطه O مرکز

یک N-ضلعی منتظم می‌گذرد. در شکل مقابل، حالت $N = 3$

نشان داده شده است. این N-ضلعی منتظم مقطعی از یک منشور

با صفحه شکل است که وجوه خارجی آن آینه است. آینه‌ها بر

صفحه شکل عمودند. منشور حول محوری که از نقطه O گذشته

و بر صفحه شکل عمود است با سرعت زاویه‌ای ثابت ω به طور

ساعتگرد می‌چرخد. باریکه نور پس از بازتاب از آینه‌ای که در لحظه معینی در مسیر آن است، به پرده‌ای نامتناهی

که در پشت چشمه قرار دارد برخورد می‌کند و باعث ایجاد نقطه‌ای نورانی می‌شود. این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد

که زاویه نور بازتابیده با محور x مناسب باشد. در شکل، محور y مقطع پرده با صفحه شکل است. زاویه تابش نور

به آینه در یک لحظه نامشخص را θ بگیرید. فاصله SO را برابر D بگیرید که بسیار بزرگتر از ابعاد N-ضلعی

است. فاصله چشمه از پرده را ناچیز بگیرید. در بخش‌های آ و ب این مسئله فرض کنید انتشار نور به طور آبی

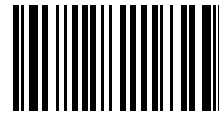
صورت می‌گیرد، یعنی سرعت انتشار آن نامتناهی است. طولی از محور y که توسط نقطه روشن جاروب می‌شود را

ΔL بگیرید و فرض کنید $f = \frac{\Delta L}{D}$. همچنین g را کسری از یک بازه زمانی طولانی بگیرید که طی آن، یک نقطه

روشن روی پرده وجود دارد.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

(آ) کسرهای f و g را برای موارد ذکر شده در جدول زیر به دست آورید. در پاسخنامه خود جدولی مشابه این جدول بکشید و جواب های خود را در خانه های خالی آن پر کنید.

N	۳	۴	$N > 4$	۶
f				
g				

در ادامه مسئله فرض کنید $N = 3$ است یعنی مقطع منشور مثلث متساوی الاضلاع است.

(ب) سرعت نقطه روشن روی پرده را بر حسب θ به دست آورید. به ازای چه مقادیری از θ اندازه سرعت نقطه روشن از مقدار معین V بیشتر است؟

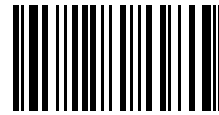
حال فرض کنید نور از ذراتی موسوم به فوتون تشکیل شده که با سرعت ثابت C منتشر می شوند. فوتون ها در برخورد با آینه از قانون بازتاب عمومی (برابری زوایای تابش و بازتاب) تبعیت می کنند. فرض کنید در لحظه $t_m = 0$ یکی از آینه ها بر خط SO عمود است و در لحظه دلخواه t_m به اندازه زاویه $\theta = \omega t_m$ چرخیده است. فوتونی که در لحظه t_m به آینه برخورد کرده در لحظه t به پرده می رسد.

(پ) t را به صورت تابعی از t_m به دست آورید.

(ت) فوتونی که در لحظه t_m به آینه برخورد می کند در نقطه y به پرده می رسد. y را به صورت تابعی از t_m به دست آورید.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

ث) سرعت نقطه نورانی روی پرده، $v = \frac{dy}{dt}$ ، که به معنی مشتق y نسبت به t است، را با استفاده از قاعده

مشتق زنجیره ای حساب کنید و سپس جواب را به صورت تابعی از θ به دست آورید.

یادآوری قاعده مشتق زنجیره ای: اگر f تابعی از متغیر u باشد و u نیز به نوبه خود تابعی از متغیر s باشد،

مشتق f نسبت به s از رابطه $\frac{df}{ds} = \frac{df}{du} \frac{du}{ds}$ به دست می آید. همچنین توجه داشته باشید که $\frac{du}{ds} = \left(\frac{ds}{du} \right)^{-1}$.

ج) نمودار کمیت $z = \frac{2\omega D}{v}$ را بر حسب $p = \sin^2 \theta$ رسم کنید. سپس نمودار $\frac{v}{c}$ را بر حسب p رسم کنید.

در محاسبات و رسم نمودارها، نسبت $\frac{\omega D}{c}$ را α بگیرید و فرض کنید $\frac{1}{3} < \alpha < 1$. بر روی نمودارها هر

مشخصه ای از قبیل نقاط تقاطع با محورها، محل کمینه ها و بیشینه ها و مقدار آن ها، محل مجانب ها، بازه های معتبر حرکت و مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازه های مذکور را مشخص کنید.

چ) با توجه به نمودار $\frac{v}{c}$ بر حسب p معلوم کنید در چه بازه ای از θ اندازه سرعت نقطه نورانی روی پرده از c

بیشتر است؟

ح) اگر بازه زمانی بسیار کوتاه بین ارسال دو فوتون متوالی از چشمه T_0 فرض شود، بازه زمانی بین رسیدن دو

فوتون متوالی به پرده، T ، را بر حسب T_0 و θ به دست آورید. معلوم کنید T همواره از T_0 بزرگتر است یا همواره

از آن کوچکتر است و یا گاهی از آن بزرگتر و گاهی کوچکتر است؟

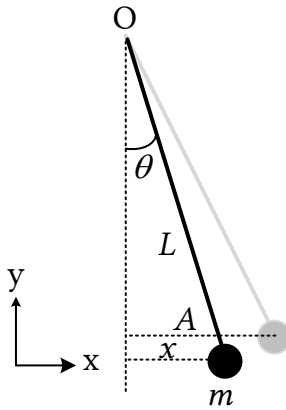




نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان



شکل ۱

۵) گوی فلزی کوچکی به جرم m در انتهای یک میله فلزی نازک بسیار سبک به طول

L قرار دارد. میله مطابق شکل ۱ از نقطه O آویزان است و می تواند حول امتداد قائم

نوسان کند. گوی فلزی را از حالت تعادل به اندازه فاصله افقی A منحرف می کنیم و

در زمان $t = 0$ آن را رها می کنیم. در تمام این مسئله زاویه انحراف آونگ کوچک است

به طوری که انحراف افقی گوی، x ، با زاویه انحراف θ رابطه تقریبی $x \approx L\theta$ دارد.

آ) انرژی پتانسیل گرانشی آونگ، $U(x)$ ، را نسبت به پایین ترین نقطه حرکت آن بر

حسب x به دست آورید. با توجه به این که x از L بسیار کوچکتر است، با استفاده از رابطه

$1 + \frac{1}{\epsilon} \approx (1 + \epsilon)^{\frac{1}{\epsilon}}$ که برای $|\epsilon|$ خیلی کوچکتر از یک، تقریب خوبی است، تابع انرژی پتانسیل گرانشی را

به صورت $U(x) = \frac{1}{\epsilon} kx^{\frac{1}{\epsilon}}$ به دست آورید و ضریب k را بر حسب داده های مسئله بنویسید.

ب) انرژی کل این دستگاه، $E = K + U$ ، ثابت است و با زمان تغییر نمی کند. مشتق این کمیت نسبت به زمان

را حساب کنید و برابر صفر قرار دهید. از این طریق برای حرکت آونگ نسبت $\frac{a}{x}$ را بر حسب ثابت های مسئله به

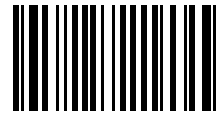
دست آورید که a شتاب افقی گوی و x جابه جایی آن از حالت تعادل است. سرعت لحظه ای افقی گوی را v

بگیرید. لازم به ذکر است که در تمام این مسئله مؤلفه قائم سرعت گوی قابل چشم پوشی است.

راهنمایی: برای محاسبه مشتق کمیت های $x^{\frac{1}{\epsilon}}$ و $v^{\frac{1}{\epsilon}}$ نسبت به زمان از قاعده مشتق زنجیره ای استفاده کنید.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

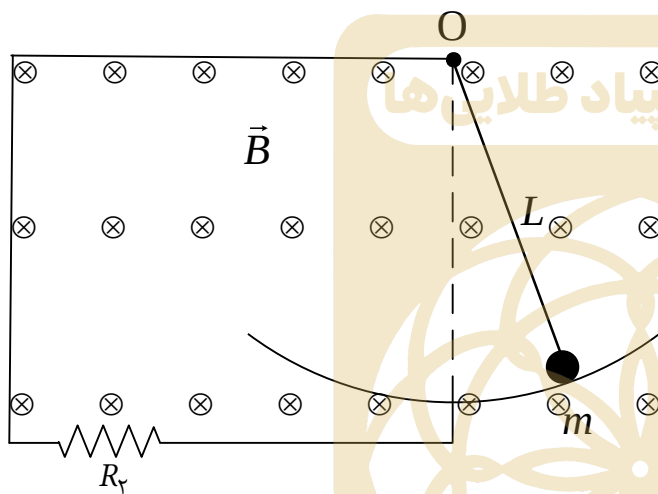


سازمان ملی پرورش استعدادی در شان

پ) برای حرکت نوسانی با معادله $x = A \cos(\omega t + \beta)$ نسبت $\frac{a}{x}$ را به دست آورید. از مقایسه این نتیجه با

نتیجه بخش ب بسامد زاویه ای ω را برای حرکت آونگ حساب کنید. همچنین با توجه به شرایط اولیه مسئله،

β (فاز اولیه) را نیز تعیین کنید.



شکل ۲

حال دستگاه شکل ۲ را در نظر بگیرید. در این

دستگاه، آونگ شکل ۱ در یک مدار الکتریکی قرار

داده شده است. گوی فلزی مماس بر سطح یک

رسانای بدون مقاومت و بدون اصطکاک با مقطع

دایره ای حرکت می کند و همواره اتصال مدار برقرار

است. مقاومت الکتریکی میله و گوی را R_1 بگیرید و

از مقاومت الکتریکی سیم ها چشم پوشید. همچنین مدار دارای یک مصرف کننده با مقاومت R_p است. میدان

مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ عمود بر سطح مدار و به سمت داخل شکل برقرار است. لازم به ذکر است که در این حالت،

گوی فلزی حرکت هماهنگ ساده ندارد.

ت) نیروی محرکه الکتریکی القاء شده در مدار را بر حسب سرعت افقی گوی، v ، و سایر داده های مسئله به

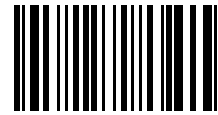
دست آورید.

راهنمایی: برای زاویه های کوچک می توان کمان مقابل به زاویه را با وتر متناظر با آن یکی گرفت.





نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادی درمیان

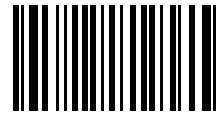
ث) انرژی این دستگاه به دلیل اتلاف در مقاومت‌ها ثابت نیست و با زمان کاهش می‌یابد. می‌دانیم اندازه انرژی تلف شده در واحد زمان در مقاومت الکتریکی R برابر Ri^2 است که i جریان لحظه‌ای گذرنده از مقاومت است. حال مشتق انرژی دستگاه نسبت به زمان را با منفی اندازه آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت‌ها برابر بگیرید، و به معادله‌ای به صورت $ma + bv + kx = 0$ برسید که در آن a شتاب، v سرعت و x جابه‌جایی افقی گوی است. ضرایب b و k را معین کنید.

ج) جواب معادله‌ای که در بخش ث به دست آمد به صورت $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \beta)$ است. در این معادله از تابع نمایی $e^{-\gamma t}$ استفاده شده است که در آن e عددنپر نام دارد و مقدار آن تا سه رقم معنی‌دار برابر 2.72 است. مشتق این تابع نسبت به زمان به صورت $\frac{d(e^{-\gamma t})}{dt} = -\gamma e^{-\gamma t}$ است. این حل را در معادله به دست آمده در بخش ث قرار دهید و کمیت‌های γ و ω' را بر حسب ثابت‌های مسئله به دست آورید.

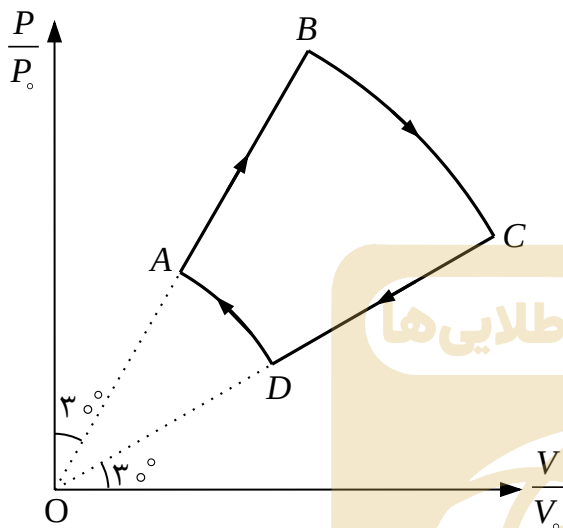
در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان



۶) n مول گاز کامل تک‌اتمی فرآیند ترمودینامیکی چرخه

شکل مقابل در صفحه نمودار P/P_0 بر حسب V/V_0 را طی می‌کند که P_0 فشاری معین و V_0 حجمی معین است.

فرآیندهای $B \rightarrow C$ و $D \rightarrow A$ به ترتیب کمانی از دایره‌های به شعاع ۲ و ۱ و به مرکز مبدأ مختصات در این صفحه‌اند.

مطابق شکل امتداد OC با محور افقی و امتداد OB با محور عمودی زاویه 3° می‌سازند. کمیت‌های خواسته شده را بر

حسب n ، R ، V_0 ، P_0 و $T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR}$ بنویسید و پاسخ‌های خود را تا جایی که امکان دارد ساده کنید. در ارائه

جواب‌های عددی، محاسبه جذر اعداد ضروری نیست. لازم به ذکر است که انرژی داخلی n مول گاز کامل تک

اتمی در دمای T برابر $\frac{3}{2}nRT$ است که R ثابت جهانی گازها است.

آ) مختصات ترمودینامیکی، (V, P, T) ، هر یک از نقاط A ، B ، C و D را به دست آورید.

ب) کار محیط روی گاز در هر یک از فرآیندهای $A \rightarrow B$ ، $B \rightarrow C$ ، $C \rightarrow D$ و $D \rightarrow A$ را محاسبه و همراه

با علامت آن بنویسید.

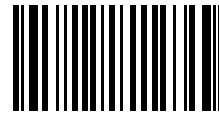
پ) کار محیط روی گاز در کل این چرخه چه قدر است؟

ت) گرمای خالص داده شده به گاز (گرمای داده شده به گاز منهای گرمای گرفته شده از گاز) در هر یک از

فرآیندهای $A \rightarrow B$ ، $B \rightarrow C$ ، $C \rightarrow D$ و $D \rightarrow A$ را محاسبه کنید و همراه با علامت آن بنویسید.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادی درمندان

ث) نقطه‌ای روی فرآیند $B \rightarrow C$ و نقطه مشابهی روی فرآیند $D \rightarrow A$ وجود دارد که گرمای مبادله شده با محیط قبل و بعد آن تغییر علامت می‌دهد. مختصات ترمودینامیکی این نقاط را به دست آورید.

راهنمایی: به عنوان مثال در فرآیند $B \rightarrow C$ اگر گرمای داده شده به گاز از نقطه B تا نقطه دلخواهی روی

کمان BC را $Q(V)$ بگیریم، نقطه مورد نظر جایی است که مشتق Q نسبت به V تغییر علامت دهد.

ج) گرمای داده شده به گاز از طرف محیط در این چرخه و گرمای گرفته شده از گاز در این چرخه را به دست

آورید. در ارائه جواب می‌توانید از توابع معکوس مثلثاتی استفاده کنید. به عنوان مثال اگر $\tan \theta = c$ باشد می‌توان نوشت $\theta = \tan^{-1} c$ که θ بر حسب رادیان است.

در صورت لزوم از این قسمت به

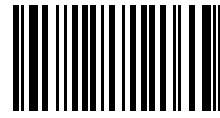
عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ

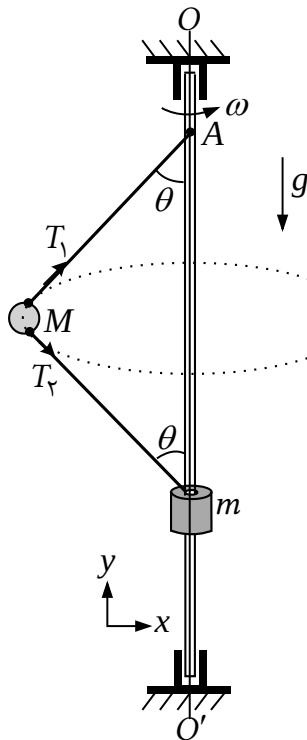
شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان



شکل ۱

(۷) مطابق شکل ۱ به مهره‌ای با جرم M دو ریسمان (نخ) یکسان هر یک به طول $\frac{l}{4}$ متصل شده است. انتهای یکی از ریسمان‌ها به نقطه ثابت A از میله‌ای قائم و انتهای ریسمان دیگر به جرم m که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله بلغزد، وصل شده‌اند. میله قائم به موتوری وصل است که آن را حول راستای OO' می‌چرخاند. از جرم ریسمان‌ها و شعاع میله صرف‌نظر کنید. شتاب گرانش g است.

(آ) در وضعیتی که مهره و ریسمان‌ها در صفحه شکل هستند قانون دوم نیوتن را برای هر یک از جرم‌ها در راستای x و y بر حسب زاویه θ ، نیروهای کشش ریسمان‌ها (T_1 و T_2)، سرعت زاویه‌ای (ω) و سایر پارامترهای داده شده بنویسید.

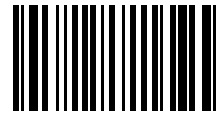
(ب) یک جواب بدیهی برای این دستگاه $\theta = 0$ است. اگر ω از مقدار کمینه ω_m بزرگ‌تر باشد جواب دیگری نیز برای زاویه θ به دست می‌آید. ω_m را بر حسب M ، m ، l و g تعیین کنید.

(پ) به ازای $\omega = 2\omega_m$ کشش ریسمان‌ها، $\cos \theta$ و شعاع دایره مسیر حرکت جرم M را به دست آورید.

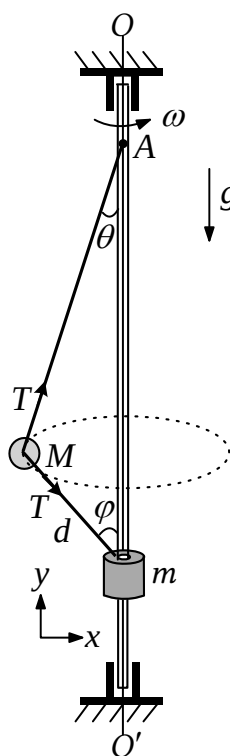
اکنون مطابق شکل ۲، ریسمانی به طول l در نظر بگیرید که یک سر آن به نقطه ثابت A روی میله قائم بسته شده و انتهای آن به وزنه‌ای به جرم m متصل است که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله بلغزد. ریسمان از داخل مهره‌ای به جرم M عبور داده شده و مهره نیز می‌تواند بدون اصطکاک در طول ریسمان حرکت کند. در این حالت نیز میله



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان



شکل ۲

قائم به موتوری وصل است که میله را حول راستای OO' می چرخاند. موتور با چنان سرعت زاویه ای ω می چرخد که در نتیجه آن مهره بر روی یک مسیر دایره ای حول راستای قائم می چرخد. مطابق شکل ۲ زاویه ریسمان ها با راستای قائم θ و φ و طول ریسمان واقع بین دو جرم d است. از جرم ریسمان و شعاع میله صرف نظر کنید. حرکت بدون اصطکاک مهره در طول ریسمان باعث می شود کشش در طول ریسمان یکسان باشد.

ت) قانون دوم نیوتن را برای هر یک از جرم ها در راستای x و y بر حسب زاویه های θ و φ ، نیروی کشش ریسمان (T) ، سرعت زاویه ای (ω) و سایر پارامترهای داده شده بنویسید.

در قسمت های بعدی مسئله فرض کنید $M = 2m$.

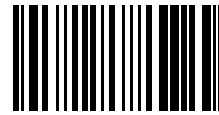
ث) کمیت $\cos^2 \theta$ را بر حسب متغیر $u = \frac{d}{l}$ به دست آورید. (فرض کنید جواب در محدوده قابل قبول است).

ج) کمیت ω^2 را بر حسب u ، l و g به دست آورید.

چ) به ازای $u = \frac{1}{4}$ ، سرعت زاویه ای، کشش ریسمان، $\cos \theta$ ، $\cos \varphi$ و شعاع دایره مسیر حرکت جرم $2m$ را به دست آورید.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

ح) به ازای مقدار خاصی از u کمیت $\frac{l\omega^2}{g}$ کمینه می شود. این مقدار خاص u ریشه حقیقی و مجاز یک معادله

درجه چهار به صورت $u^4 + c_3u^3 + c_2u^2 + c_1u + c_0 = 0$ است. مقدار عددی ضرایب c_0, c_1, c_2 و c_3 را به

دست آورید. (حل این معادله لازم نیست.)

باشگاه المپیاد طلایی ها

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد

(A) بدین که دما در زمین T_G و دمای لایه T_A باقی بماند باید

$$\begin{cases} S_S + S_A = S_G \\ 2 S_A = S_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_B^4 + T_A^4 = T_G^4 \\ 2 T_A^4 = T_G^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} T_A &= T_B \\ T_G &= 2^{1/4} T_B \end{aligned}$$

(B) بدین لایه l ام : $S_{l+1} + S_{l-1} = 2 S_l$, $1 \leq l < N$

بدین لایه N ام : $S_{N-1} = 2 S_N$

بدین زمین : $S_S + S_1 = S_E$

(پ) از معادلات (ب) و این که $S_0 = S_E$ است :

$$\begin{aligned} \text{زمین} \quad S_S + S_1 &= S_E \\ l=1 : S_2 + S_1 &= 2 S_1 \\ l=2 : S_3 + S_1 &= 2 S_2 \\ &\vdots \\ l=N-1 : S_N + S_{N-2} &= 2 S_{N-1} \\ N \text{ ام} \quad S_{N-1} &= 2 S_N \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{c} \text{از جمع این} \\ \text{معادلات} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} S_S + S_N &= 2 S_N \\ \Downarrow \\ T_B^4 &= T_N^4 \\ \Downarrow \\ T_N &= T_B \end{aligned}$$

(C) از معادله لایه N : $T_{N-1}^4 = 2 T_B^4$

از معادله لایه $l=N-1$: $T_{N-2}^4 = 3 T_B^4$

تا رسیدیم به معادله سطح l : $T_l^4 = (N-l+1) T_B^4$

$$T_l = (N-l+1)^{1/4} T_B$$

(ث) در نتیجه $S_0 = S_E$: $T_E = (N+1)^{1/4} T_B$

$$q\varphi_B = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

(ب) اگر $K_0 = 0$ اندر جبهه ذره در نقطه 1 روی D_2 باشد و K_1 اندر جبهه ذره پس از عبور از شکاف بدین اولین باشد

$$\Delta K_1 = K_1 - K_0 = qV_0$$

$$\Delta K_2 = K_2 - K_1 = qV_0$$

پس از بار دوم

⋮

$$\Delta K_k = K_k - K_{k-1} = qV_0$$

و پس از بار k ام

$$K_k - K_0 = kqV_0$$

از جمع معادلات فوق

$$\frac{1}{2} m v_k^2 - 0 = kqV_0 \Rightarrow v_k = \sqrt{\frac{2kqV_0}{m}}$$

$$r_k = \frac{mv_k}{qB}$$

(پ) مشابه با قسمت (آ) !

$$r_k = \sqrt{\frac{2kV_0 m}{qB^2}}$$

(ت) اگر $v_0 = 0$ سرعت ذره هنگام ترک نقطه 1 باشد ، سرعت ذره ، v_1 ، پس از اولین عبور از شکاف بدین است :

$$v_1 = at_1 + v_0$$

اندازه سرعت ذره هنگام طی مسیر نیم دایره ای در میدان مغناطیسی ثابت می ماند.

$$v_2 = at_2 + v_1$$

پس از دومین عبور ذره از شکاف :

⋮

$$v_k = at_k + v_{k-1}$$

و پس از k ام عبور ذره از شکاف :

$$v_k = a(t_1 + t_2 + \dots + t_k) + v_0$$

از جمع ضرایب معادلات :

بنابراین مجموع زمان هایی که ذره بین شکاف ها سپری می کند

$$t_1 + t_2 + \dots + t_k = \frac{v_k}{a}$$

که a برابر است با: $a = \frac{qV_0}{ms}$ زیرا $ma = qE = \frac{qV_0}{s}$

در نتیجه $t_1 + t_2 + \dots + t_k = \sqrt{\frac{2kqV_0}{m}} / \frac{qV_0}{ms}$

ثابت T زمان طی مسیرها ریم دایره هم با هم برابراند ثب برابرین تا رسیدن ذره به نقطه 2 ، $k-1$ بار مسیریم دایره ای طی کرده است.

سرانجام زمان کل برابر است با $t = t_1 + t_2 + \dots + t_k + (k-1)\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{2mk}{qV_0}} s + (k-1)\frac{m\pi}{qB}$

ث) $\ell = ks + \sum_{i=1}^{k-1} \pi r_i = ks + \pi \sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}} \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{i}$

$\ell \approx ks + \pi \sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}} \left(\frac{2}{3} \sqrt{(k-1)^3} + \frac{1}{2} \sqrt{k-1} \right)$

$\ell \approx ks + \pi \sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}} \sqrt{k-1} \left(\frac{2}{3}k - \frac{1}{6} \right)$

ج) با توجه به این که بعد از زمان $\frac{T}{2}$ پتانسیل الکتریکی D_2 معکوس می شود و این که بار q مثبت است ، حرکت در صورتی تند شونده است که پتانسیل D_2 قبل از ورود ذره از D_1 به D_2 منفی و قبل از خروج ذره از D_2 به D_1 مثبت باشد. اگر این فرآیند برعکس شود حرکت ذره بین کلاف ها کند شونده می شود. یعنی مجموع زمان های که ذره بین D ها می گذراند از $\frac{T}{2}$ کمتر باشد

$t_1 + t_2 + \dots + t_k < \frac{T}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{2mk}{qV_0}} s < \frac{T}{2} \Rightarrow s < \sqrt{\frac{mV_0}{2kq}} \frac{\pi}{B}$

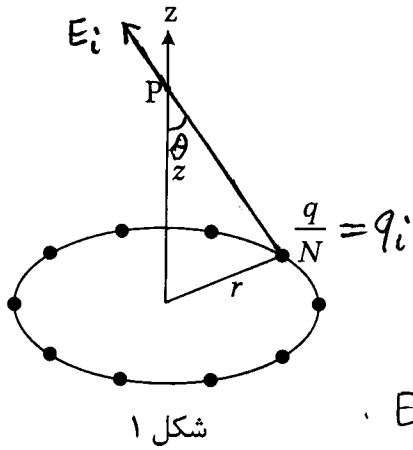
ج) $k = \frac{\frac{1}{2} m v_k^2}{qV_0} = \frac{25 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1.6 \times 10^{-19} \times 50 \times 10^3 \text{ J}} = 500$

$t = 1.57 \times 10^{-5} \text{ s}$

$\ell = 72.6 \text{ m}$

از نتیجه قسمت ک ا:

از نتیجه قسمت ث):



$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2 + r^2}$$

(۱) ۳

$$E = \sum_{i=1}^N E_i \cos\theta = \sum_{i=1}^N \left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2 + r^2} \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \sum_{i=1}^N q_i$$

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} \quad \text{چون } \sum_{i=1}^N q_i = N \left(\frac{q}{N} \right) = q \quad \text{و}$$

$N \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^N q_i = q$$

(۲) این بار، $q_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q}{N}$ ، از طرفی بار هم

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$$

در نتیجه

$$V_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}}, \quad q_i = \frac{q}{N}$$

(۳)

$$V = \sum_{i=1}^N V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$\cos\theta_n = \frac{R - n\Delta z + \frac{1}{2}\Delta z}{R} = 1 + \left(-n + \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta z}{R} = 1 - \frac{2n-1}{N} \Delta z \quad \text{(۴)}$$

$$\Delta S = (2\pi R \sin\theta_n) \Delta l, \quad \Delta l = \frac{\Delta z}{\sin\theta_n} \quad \Delta z \triangleq \Delta l \sin\theta_n \quad \text{(۵)}$$

$$= 2\pi R \Delta z = 2\pi R \left(\frac{2R}{N} \right) = \frac{4\pi R^2}{N}$$

سطح هر قطعه برابر و $\frac{1}{N}$ مساحت کروی است.

$$\Delta Q = \frac{Q}{4\pi R^2} \Delta S = \frac{Q}{N}$$

(۶) در سمت راست برای قطعه بار ΔQ ، فاصله $z_n = d - R \cos\theta_n$

از نقطه P و به شعاع $r_n = R \sin\theta_n$ ، در سمت راست داریم

$$E_n = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 (z_n^2 + r_n^2)^{3/2}}$$

$$E = \sum_{n=1}^N E_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{N} \frac{d - R\cos\theta_n}{[(d - R\cos\theta_n)^2 + (R\sin\theta_n)^2]^{3/2}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{N} \sum_{n=1}^N \frac{d - R\cos\theta_n}{(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta_n)^{3/2}}$$

(ج) در قسمت ب) بارها را به ΔQ تقسیم می‌کنیم و $z_n = d - R\cos\theta_n$ و $r_n = R\sin\theta_n$ می‌نویسیم.

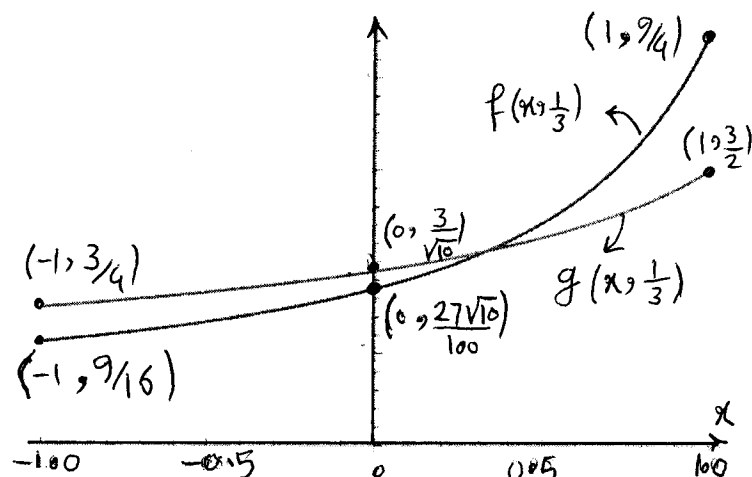
$$V_n = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z_n^2 + r_n^2}}, \quad V = \sum_{n=1}^N V_n$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta_n)^{1/2}}$$

$$f(x_n, \alpha) = \frac{1 - \alpha x_n}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha x_n)^{3/2}}, \quad f(x, \alpha) = \frac{1 - \alpha x}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha x)^{3/2}} \quad (2)$$

$$g(x_n, \alpha) = \frac{1}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha x_n)^{1/2}}, \quad g(x, \alpha) = \frac{1}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha x)^{1/2}}$$

$$f(x, \frac{1}{3}) = \frac{1 - \frac{x}{3}}{(\frac{10}{9} - \frac{2}{3}x)^{3/2}}, \quad g(x, \frac{1}{3}) = \frac{1}{(\frac{10}{9} - \frac{2}{3}x)^{1/2}}$$



(۲) اگر مطابق شکل، θ را از محور x بشیم، در صورتی امکان پذیرد نور

بازتابی به پرتو y وجود دارد که $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ باشد.

به ازای $N=3$ ، شروع انعکاس از یک آنه معین در $\theta = -\frac{\pi}{3}$ است. از مقایسه

این بازه با بازه $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ که $g = \frac{90^\circ}{120^\circ} = \frac{3}{4}$ به دست می آید. در این حالت

ΔL کل محور y را در بر می گیرد و $f \rightarrow \infty$

به ازای $N=4$ بازه ای که نور پس از انعکاس به پرتو y می خورد $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ است

پس $g = \frac{90^\circ}{90^\circ} = 1$. در این وضعیت نیز کل محور y به وسیله نقطه روشن جاد می شود و

$f \rightarrow \infty$.

بدان مشور که سطح مقطع آن N ضلعی منتظم است داریم $-\frac{\pi}{N} < \theta < \frac{\pi}{N}$.

در این وضعیت $g=1$ است. در هر یک از دو حالت $\theta = \pm \frac{\pi}{N}$ زاویه پرتو

بازتاب با محور x $\pm \frac{2\pi}{N}$ است. بنابراین $\Delta L = 2D \tan \frac{2\pi}{N}$ و

$$f = 2 \tan \frac{2\pi}{N}$$

به ازای $N=6$ ، $g=1$ و $f = 2 \tan \frac{2\pi}{6} = 2\sqrt{3}$

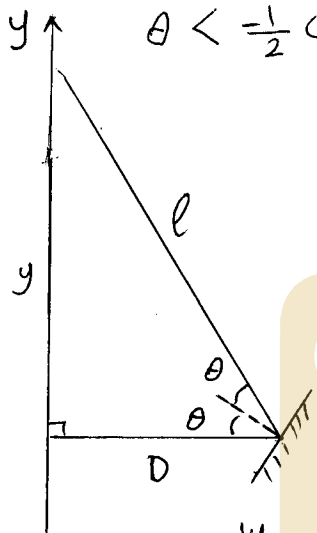
N	۳	۴	$N > 4$	۶
f	∞	∞	$2 \tan \frac{2\pi}{N}$	$2\sqrt{3}$
g	$\frac{3}{4}$	۱	۱	۱

$$y = D \tan 2\theta = D \tan 2\omega t$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 2\omega D (1 + \tan^2 2\omega t) = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\omega t} = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\theta}$$

$$|\cos 2\theta| < \sqrt{\frac{2\omega D}{v}} \quad \text{بما ان } v > v$$

$$\theta < -\frac{1}{2} \cos^{-1} \sqrt{\frac{2\omega D}{v}} \quad \text{و} \quad \theta > \frac{1}{2} \cos^{-1} \sqrt{\frac{2\omega D}{v}}$$



$$t = t_m + \frac{l}{c} \quad , \quad l = \frac{D}{\cos 2\theta}$$

$$t = t_m + \frac{D}{c} \frac{1}{\cos 2\omega t_m}$$

$$y = D \tan 2\theta = D \tan 2\omega t_m$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt_m} \left(\frac{dt}{dt_m} \right)^{-1}$$

$$v = \frac{2\omega D \left(\frac{1}{\cos^2 2\omega t_m} \right) \left(1 + \frac{D}{c} \frac{2\omega \sin 2\omega t_m}{\cos^2 2\omega t_m} \right)^{-1}}$$

$$v = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\omega t_m + \frac{2\omega D}{c} \sin 2\omega t_m}$$

$$\cos^2 2\theta = 1 - p^2, \quad \sin 2\theta = p \quad \Leftarrow \quad \theta = \omega t_m \quad \alpha = \frac{\omega D}{c} \quad (2)$$

$$\frac{v}{c} = \frac{2\alpha}{1 - p^2 + 2\alpha p}, \quad \frac{2\omega D}{v} = 1 - p^2 + 2\alpha p$$

$$-1 < p < 1 \quad \Leftarrow \quad -1 < \sin 2\theta < 1 \quad \Leftarrow \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \quad \text{بما ان}$$

$$r(p) = 1 - p^2 + 2\alpha p$$

$$\frac{dr}{dp} = 0 \Rightarrow p = \alpha \Rightarrow r(\alpha) = 1 + \alpha^2$$

$$r(p) = 0 \Rightarrow p_0 = \alpha - \sqrt{1 + \alpha^2}$$

$$r(-1) = -2\alpha$$

$$r(1) = 2\alpha$$

$$r(0) = 1$$

اگر $r(p)$ و $q(p)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

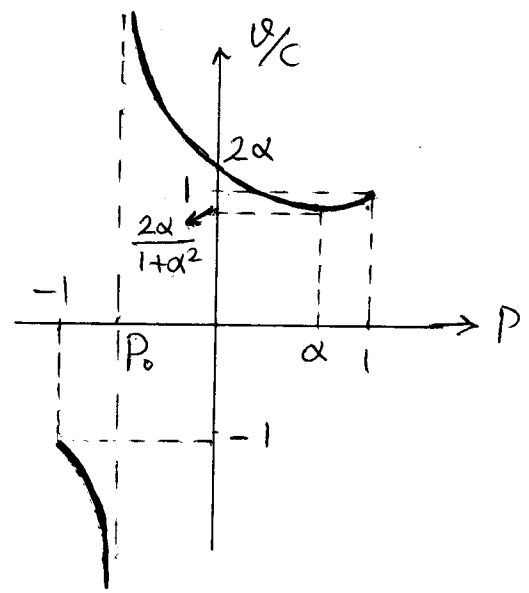
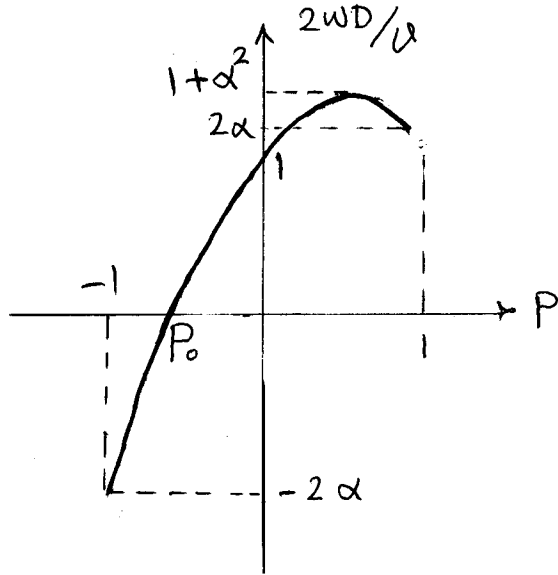
$$q(p) = \frac{2\alpha}{1 - p^2 + 2\alpha p}$$

$$\frac{dq}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{4\alpha(p - \alpha)}{(1 - p^2 + 2\alpha p)^2} = 0 \Rightarrow p = \alpha$$

$$q(\alpha) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \quad , \quad q(-1) = -1 \quad , \quad q(1) = 1$$

$$q(0) = 2\alpha$$

$$\frac{v}{c} \rightarrow \pm \infty \Rightarrow p_0 = \alpha - \sqrt{1 + \alpha^2} \quad \text{مجاوب}$$



ج) باتوجه به نمودار $\frac{v}{c}$ بر حسب P مشخص است که

برای کلیه P ها مثبت و $P < P_1$ هر مثبتی که P_1 برابر است با

$$\frac{v}{c} = 1 \Rightarrow \frac{2\alpha}{1-P_1^2+2\alpha P_1} = 1 \Rightarrow P_1 = \begin{cases} 1 \\ 2\alpha-1 \end{cases} \text{ قابل قبول}$$

یعنی به ازای $-1 < P < 2\alpha-1$ داریم $\frac{v}{c} > 1$ بر حسب θ خواهد بود:

$$-1 < \sin 2\theta < 2\alpha-1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{1}{2} \sin^{-1}(2\alpha-1)$$

$$dt = \left(\frac{dt}{dt_m} \right) dt_m$$

ج) باتوجه به مفهوم متوق:

$$T = \left(1 + \frac{2\omega D}{c} \frac{\sin 2\omega t_m}{\cos^2 2\omega t_m} \right) T_0$$

همواره $T > T_0$ است.

$$U(x) = mg(L - \sqrt{L^2 - x^2})$$

$$\sqrt{L^2 - x^2} = L \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx L \left(1 - \frac{x^2}{2L^2}\right)$$

$$U(x) = \frac{1}{2} m \left(\frac{g}{L}\right) x^2 \Rightarrow k = mg/L$$

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad v \approx v_x \text{ و } v \approx \quad (ب)$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m v a + k x v = 0 \Rightarrow \frac{a}{x} = -\frac{k}{m} = -\frac{g}{L}$$

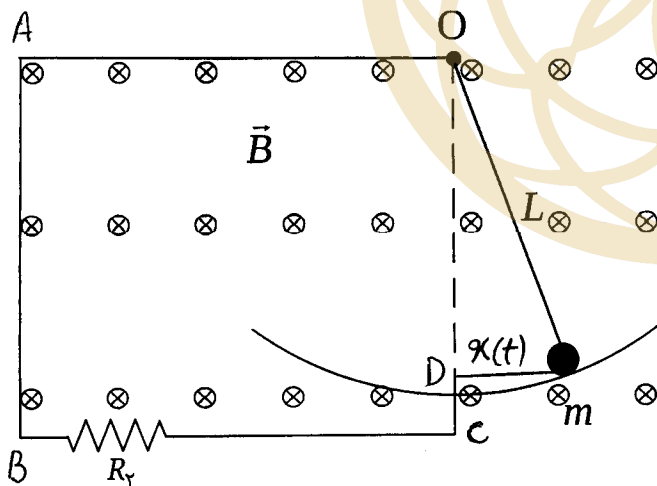
$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \beta)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \beta) = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{a}{x} = -\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

از معادله بالا

در $t=0$ داریم $x=A$ و $v=0$ به جای این
 $0 = -A\omega \sin\beta \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow x = A \cos \omega t$ یا $x = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$



(ت) در وضعیت نشخ داده شده در شکل

مساحت مدار برابر است با

$$A = A_0 + a(t)$$

A_0 مساحت متوازی‌الاضلاع OABC و $a(t)$

مساحت مثلث کوچک ODM است.

$$a(t) = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - x^2(t)} x(t)$$

$$= \frac{1}{2} L x(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} L x(t)$$

$$\Phi = BA \quad , \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (A_0 + a(t))B = -B \frac{da(t)}{dt} = -\frac{LB}{2} \frac{dx(t)}{dt}$$

↑
مساحت متوازی‌الاضلاع

$$\frac{dE}{dt} = -Ri^2$$

ث) این بار

$$R = R_1 + R_2, \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}, \quad k = \frac{mg}{L}, \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$mva + kx = - \frac{\left(-\frac{1}{2}LB\mathcal{E}\right)^2}{R_1 + R_2}$$

ب) بدین

$$ma + \frac{L^2 B^2}{4(R_1 + R_2)} v + kx = 0 \Rightarrow b = \frac{L^2 B^2}{4(R_1 + R_2)}$$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \beta) \quad (2)$$

$$v = -A\gamma e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \beta) + A e^{-\gamma t} (\omega') \cos(\omega' t + \beta)$$

$$a = A(\gamma^2 - \omega'^2) e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \beta) + 2A\omega'\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \beta)$$

با قرار دادن در معادله $ma + b v + kx = 0$ و برابر قرار دادن ضرایب کسیت های مستقل $A \cos(\omega' t + \beta) e^{-\gamma t}$ و $A \sin(\omega' t + \beta) e^{-\gamma t}$ خواص دانت

$$m(\gamma^2 - \omega'^2) - b\gamma + k = 0, \quad k = \frac{mg}{L}$$

$$2m\gamma\omega' - b\omega' = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{b}{2m}$$

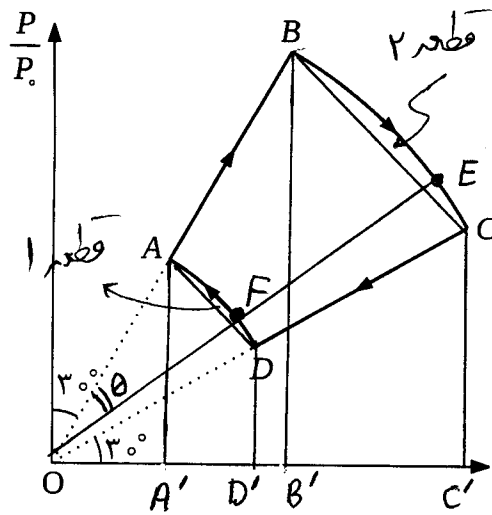
$$\omega'^2 = \frac{g}{L} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

با قرار دادن معادله اول

$$\gamma = \frac{L B^2}{8m(R_1 + R_2)}$$

بر حسب کسیت ها معلوم

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{L^2 B^2}{8m(R_1 + R_2)}\right)^2}$$



$$(1) \left(\frac{P}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 1$$

معادله دایره AD :

$$(2) \left(\frac{P}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 4$$

معادله دایره BC :

$$(3) \frac{P}{P_0} = \left(\tan \frac{\pi}{6}\right) \frac{V}{V_0}$$

معادله خط DC :

$$(4) \frac{P}{P_0} = \left(\tan \frac{\pi}{3}\right) \frac{V}{V_0}$$

معادله خط AB :

$$V_A = \frac{V_0}{2} \text{ و } P_A = \frac{\sqrt{3}}{2} P_0$$

از معادلات (۱) و (۴) :

$$T_A = \frac{\sqrt{3}}{4} T_0$$

$$T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR}$$

از معادله $PV = nRT$:

از معادلات (۲) و (۴) ، معادله حالت ک ؛ کامل

$$V_B = V_0 \text{ , } P_B = \sqrt{3} P_0 \text{ , } T_B = \sqrt{3} T_0$$

$$V_C = \sqrt{3} V_0 \text{ , } P_C = P_0 \text{ , } T_C = \sqrt{3} T_0$$

به طور مستقیم

$$V_D = \frac{\sqrt{3}}{2} V_0 \text{ , } P_D = \frac{1}{2} P_0 \text{ , } T_D = \frac{\sqrt{3}}{4} T_0$$

$$W_{A \rightarrow B} = -(\text{مساحت ذوزنقه } ABB'A')$$

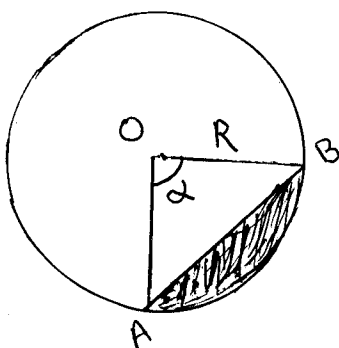
(ب)

$$= - (P_A + P_B) \frac{1}{2} (V_B - V_A) = - \frac{3\sqrt{3}}{8} P_0 V_0$$

$$W_{C \rightarrow D} = +(\text{مساحت ذوزنقه } CDD'C')$$

به طور مستقیم

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} P_0 V_0$$



بدر از ادامه می‌باید ابتدا مساحت یک قطعه از دایره
(نصف بین کمان دایره و وتر) را به دست می‌آوریم

$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{دایره OAB}} - S_{\text{مثلث OAB}} = \frac{R^2}{2} \alpha - \frac{1}{2} (R \sin \frac{\alpha}{2}) (2R \sin \frac{\alpha}{2})$$

$$S_{\text{قطعه}} = \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$$

$$\begin{aligned}
 W_{B \rightarrow C} &= -(\text{مساحت مقطع ۲} + \text{مساحت ذوزنقه } BCC'B') \\
 &= -\left[(P_B + P_C) \frac{1}{2} (V_C - V_B) + \frac{2^2}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \right) P_0 V_0 \right] \\
 &= -\left[P_0 V_0 + \left(\frac{\pi}{3} - 1 \right) P_0 V_0 \right] = -\frac{\pi}{3} P_0 V_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{D \rightarrow A} &= [\text{مساحت مقطع ۱} + \text{مساحت ذوزنقه } ADD'A'] \\
 &= \left[\frac{1}{4} P_0 V_0 + \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} \right) P_0 V_0 \right] = \frac{\pi}{12} P_0 V_0
 \end{aligned}$$

$$W_{\text{مجموع}} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A} \quad (پ)$$

$$W_{\text{مجموع}} = -\frac{\pi}{4} P_0 V_0$$

$$\Delta U = Q + W \quad (ج)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{A \rightarrow B} &= U_B - U_A - W_{A \rightarrow B} \\
 &= \left(\frac{3}{2} n R T_B - \frac{3}{2} n R T_A \right) - W_{A \rightarrow B} = \left[\frac{9\sqrt{3}}{8} - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \right] P_0 V_0
 \end{aligned}$$

$$Q_{A \rightarrow B} = \frac{3\sqrt{3}}{2} P_0 V_0$$

$$Q_{B \rightarrow C} = \left[0 - \left(-\frac{\pi}{3} P_0 V_0 \right) \right] = \frac{\pi}{3} P_0 V_0 \quad \text{به طور مثبت به}$$

$$Q_{C \rightarrow D} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} P_0 V_0$$

$$Q_{D \rightarrow A} = -\frac{\pi}{12} P_0 V_0$$

$$dU = dW + dQ$$

(ث) از قانون اول ترمودینامیک :

$$d\left(\frac{3}{2} n R T\right) = -P dV + dQ$$

$$\frac{3}{2} d(PV) = -P dV + dQ$$

$$dQ = \frac{5}{2} P dV + \frac{3}{2} V dP$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 4$$

در کنترل BC :

$$P = P_0 \sqrt{4 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2} \Rightarrow dP = -P_0 \frac{\frac{V}{V_0^2} dV}{\sqrt{4 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2}}$$

$$dQ = dV \left(\frac{5}{2} P_0 \sqrt{4 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2} - \frac{3}{2} P_0 \frac{V^2/V_0^2}{\sqrt{4 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2}} \right)$$

$$\left. \frac{dQ}{dV} \right|_{V=V_E} = 0 \Rightarrow \left(\frac{V_E}{V_0}\right)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow V_E = \sqrt{\frac{5}{2}} V_0, P_E = \sqrt{\frac{3}{2}} P_0$$

$$T_E = \sqrt{\frac{15}{4}} T_0$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 1$$

در کنترل DA :

$$\left. \frac{dQ}{dV} \right|_{V=V_F} = 0 \Rightarrow \left(\frac{V_F}{V_0}\right)^2 = \frac{5}{8} \Rightarrow V_F = \sqrt{\frac{5}{8}} V_0, P_F = \sqrt{\frac{3}{8}} P_0$$

$$T_F = \sqrt{\frac{15}{64}} T_0$$

ج) به هر سمت (ث) : $Q_{E \rightarrow C} < 0$ و $Q_{B \rightarrow E} > 0$

$Q_{F \rightarrow A} < 0$ و $Q_{D \rightarrow F} > 0$

$$Q_+ = Q_{A \rightarrow B} + Q_{B \rightarrow E} + Q_{D \rightarrow F}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$W_{F \rightarrow A} = (\text{مساحت مقطع } AF + \text{مساحت ذوزنقه } AFF'A')$$

$$= (P_F + P_A) \frac{1}{2} (V_F - V_A) + \frac{1}{2} (\theta - \sin \theta) P_0 V_0$$

$$\sin \theta = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} (\sqrt{5} - 1) \quad : \text{و ۱}$$

$$W_{F \rightarrow A} = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \right) + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) P_0 V_0$$

$$Q_{F \rightarrow A} = U_A - U_F - W_{A \rightarrow F} = \frac{3}{2} nR (T_A - T_F) - W_{A \rightarrow F}$$

$$Q_{F \rightarrow A} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) P_0 V_0$$

$$Q_{B \rightarrow E} = U_E - U_B - W_{B \rightarrow E}$$

ن.ط.و، ن.م.ن

$$= \frac{3}{2} nR (T_E - T_B) + \left(\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) P_0 V_0$$

$$Q_{B \rightarrow E} = \left(\sqrt{15} - 2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) P_0 V_0$$

س.ا.م

$$Q_+ = Q_{A \rightarrow B} + Q_{B \rightarrow E} + (Q_{D \rightarrow A} - Q_{F \rightarrow A})$$

$$Q_+ = \left(\frac{5\sqrt{15}}{4} + \frac{3\pi}{4} - \sqrt{3} - \frac{5}{2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) P_0 V_0$$

باشگاه المپیاد تلایها



(T V

$$T_1 \cos \theta - T_2 \cos \theta = mg$$

$$T_1 \sin \theta + T_2 \sin \theta = M \frac{\ell}{2} \sin \theta \omega^2$$

$$T_2 \cos \theta = mg$$

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \frac{M}{m} T_2 \\ T_1 + T_2 &= M \frac{\ell}{2} \omega^2 \end{aligned} \Rightarrow T_2 = \frac{m \frac{\ell}{2} \omega^2}{2 + \frac{M}{m}} \quad \text{بازار } \theta \neq 0 \quad (4)$$

$$\cos \theta = \frac{mg}{T_2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2g}{\ell \omega^2} \left(\frac{2m}{m} + 1 \right)$$

$$\cos \theta < 1 \Rightarrow \frac{2g}{\ell \omega^2} \left(\frac{2m}{m} + 1 \right) < 1 \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{2g}{\ell} \left(\frac{2m}{m} + 1 \right)}$$

پ) بازار $\omega = 2\omega_m$ از معادلات (4) :

$$\cos \theta = \frac{1}{4}, \quad T_2 = 4mg, \quad T_1 = 4(m+m)g, \quad \frac{\ell}{2} \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{8} \ell$$

$$(1) \quad T \cos \theta - T \cos \varphi = mg \quad (5)$$

$$(2) \quad T \sin \theta + T \sin \varphi = M(\ell - d) \sin \theta \omega^2$$

$$(3) \quad T \cos \varphi = mg$$

$$(4) \quad (\ell - d) \sin \theta = d \sin \varphi \quad \text{از هندسه مثلث ۲ شعاع دایره مسیره} \quad (6)$$

بازار $M = 2m$: از تقسیم معادله (1) به معادله (3) :

$$(a) \quad \cos \theta = 3 \cos \varphi$$

با ضرب کردن (4) و (a) : $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$:

$$(4) \quad \cos^2 \theta = \frac{2u-1}{u^2/9 - (1-u)^2}$$

ج. با قرار دادن $\sin \varphi$ از معادله (۴) در معادله (۲) :

$$T \frac{\ell}{d} = 2m(\ell-d)\omega^2$$

با قرار دادن معادله (۳) در معادله (۱)

$$T \cos \theta = (m+2m)g$$

از حذف T بین دو معادله فوق

$$(v) \frac{\ell \omega^2}{g} = \frac{3}{2u(1-u) \cos \theta}$$

با قرار دادن $\cos \theta$ از معادله (۴) در معادله (۷) :

$$\frac{\ell \omega^2}{g} = \frac{\sqrt{9(1-u)^2 - u^2}}{2u(1-u)\sqrt{1-2u}}$$

یعنی $u = \frac{1}{4}$

$$\omega^2 = \frac{8\sqrt{10}}{3} \frac{g}{\ell}, \quad \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad T = \sqrt{10} mg$$

در معادله (۲)

$$d \sin \varphi = \frac{3}{4\sqrt{10}} \ell$$

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\ell \omega^2}{g} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{du} \sqrt{9(1-u)^2 - u^2} \right) u(1-u)\sqrt{1-2u} - \frac{d}{du} (u(1-u)\sqrt{1-2u}) \sqrt{9(1-u)^2 - u^2} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{8u-9}{\sqrt{9(1-u)^2 - u^2}} u(1-u)\sqrt{1-2u} = \frac{5u^2-5u+1}{\sqrt{1-2u}} \sqrt{9(1-u)^2 - u^2}$$

$$(8u-9) u(1-u)(1-2u) = (5u^2-5u+1)(9(1-u)^2 - u^2)$$

$$u^4 - \frac{11}{3}u^3 + \frac{9}{2}u^2 - \frac{9}{4}u + \frac{3}{8} = 0$$

$$c_0 = \frac{3}{8}, \quad c_1 = -\frac{9}{4}, \quad c_2 = \frac{9}{2}, \quad c_3 = -\frac{11}{3}$$