



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش



مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۸ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و ششمین دوره المپیاد فیزیک

تاریخ: ۱۴۰۲/۰۲/۱۰ - ساعت: ۸:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه



شماره صندلی

.....

استان:

منطقه:

پایه تحصیلی:

تایید کمیته علمی

شماره پرونده:

کد ملی:

نام پدر:

نام مدرسه:



حوزه:

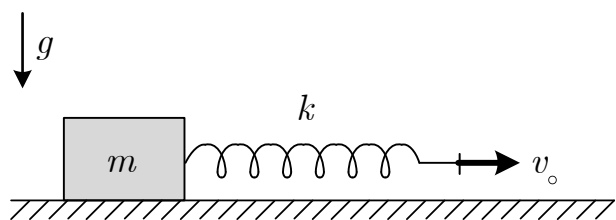
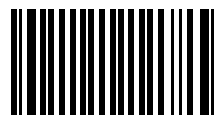
توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چکر نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکتویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید.
- در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- آزمون مرحله دوم برای دانش آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه یازدهم انتخاب می شوند.
- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



شکل ۱

(۱) جعبه‌ای به جرم m روی یک سطح افقی ساکن است.

ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جعبه و سطح به ترتیب

μ_k و μ_s است ($\mu_s > \mu_k$). یک سر فنری با ثابت k به سمت

راست جعبه متصل است و در ابتدا با طول آزاد به طور افقی نگه داشته شده است. سر آزاد فنر را طوری می کشیم که همواره

این سر فنر با سرعت ثابت v_0 حرکت کند. جرم فنر ناچیز و شتاب گرانش g است.

(آ) فنر چقدر کشیده شود تا جعبه شروع به حرکت کند؟

(ب) فرض کنید مکان اولیه جعبه $x = 0$ است و در لحظه $t = 0$ شروع به حرکت کند، شتاب جعبه را بر حسب x (مکان

لحظه‌ای جعبه)، t و سایر کمیت‌های داده شده به دست آورید.

(پ) می‌توان نشان داد که مکان لحظه‌ای جعبه، x ، بر حسب زمان به صورت زیر است

$$x(t) = A(\omega t - \sin \omega t) + B(1 - \cos \omega t),$$

A ، B و ω را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

(ت) بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار طول فنر برای اولین بار در چه زمان‌هایی رخ می‌دهد؟

(ث) در چه زمانی برای اولین بار جعبه متوقف می‌شود؟

(ج) فرض کنید به محض توقف جعبه، اصطکاک جعبه با زمین از نوع اصطکاک ایستایی می‌شود. در این صورت بعد از توقف

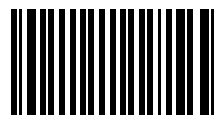
ذکر شده در بخش ث چه مدت جعبه متوقف می‌ماند تا دوباره حرکت کند؟

در صورت نیاز:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}, \quad 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



(۲) یک پینگ‌پنگ باز با حرکت منظم راکت به بالا و پایین می‌تواند توپ پینگ‌پنگ را به یک حرکت منظم رفت و برگشتی در جهت عمودی وادارد. در این مسئله می‌خواهیم حالت ساده‌ای از این حرکت را بررسی کنیم. فرض کنید راکت، صفحه‌ای افقی و صاف است که دارای حرکت منظم سینوسی با معادله $y_1(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ حول نقطه تعادل $y = 0$ است. توپ پینگ‌پنگ را جرم نقطه‌ای m بگیرد که مکان لحظه‌ای آن با $y_2(t)$ بیان می‌شود. برخورد توپ با راکت چنان است که سرعت راکت تغییر محسوسی نمی‌کند و اندازه سرعت نسبی توپ و راکت قبل و بعد از برخورد یکسان است. (منظور از سرعت نسبی، تفاضل مقادیر جبری سرعت‌های دو جسم است.) شتاب گرانش در راستای y ، رو به پایین و اندازه آن g است. این مسئله بنا به شرایط اولیه توپ و راکت در دو بخش مجزا مورد بررسی قرار می‌گیرد.

بخش اول: فرض کنید در لحظه $t = 0$ راکت در پایین‌ترین نقطه مسیر یعنی در نقطه $y_1 = -A$ قرار دارد و توپ از ارتفاع $y_2 = h$ رها می‌شود. (آ) بسامد زاویه‌ای ω را بر حسب h و g چنان تعیین کنید که وقتی راکت برای اولین بار از نقطه $y_1 = -A$ به بالا می‌آید در نقطه $y = 0$ با توپ برخورد کند.

(ب) دامنه نوسان راکت، A ، را چنان تعیین کنید که بعد از اولین برخورد، اندازه سرعت توپ دو برابر قبل از برخورد باشد.

(پ) سرعت و ارتفاع بیشینه توپ بعد از اولین، دومین، سومین و چهارمین برخورد را به دست آورید.

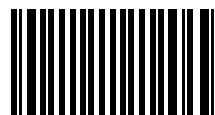
(ت) نمودار $y_1(t)$ و $y_2(t)$ را در بازه‌های زمانی بین برخوردهای ذکر شده رسم کنید. بعد از چهارمین برخورد حرکت چگونه خواهد بود؟

بخش دوم: این بار فرض کنید در لحظه $t = 0$ راکت در نقطه $y_1 = 0$ است و به سمت پایین حرکت می‌کند. توپ

نیز از ارتفاع $y_2 = h$ رها می‌شود.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



ث) بسامد زاویه‌ای ω را بر حسب h و g چنان تعیین کنید که راکت بعد از رفتن به پایین و در ضمن برگشتن به بالا در نقطه $y = 0$ با توپ برخورد کند.

ج) دامنه نوسان راکت، A ، را چنان تعیین کنید که بعد از اولین برخورد، اندازه سرعت توپ دو برابر قبل از برخورد باشد.

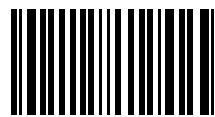
چ) سرعت و ارتفاع بیشینه توپ بعد از اولین، دومین و سومین برخورد را به دست آورید.

ح) نمودار $y_1(t)$ و $y_2(t)$ را در بازه‌های زمانی بین برخوردهای ذکر شده رسم کنید. بعد از سومین برخورد حرکت چگونه خواهد بود؟

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد

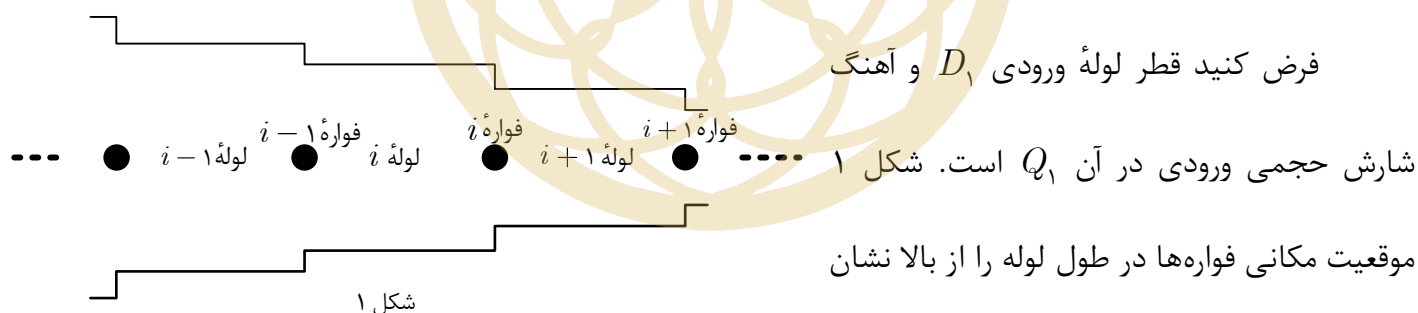


نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



(۳) باغ فین یکی از جاذبه‌های گردشگری و مهندسی شهر کاشان است. در این باغ چند سامانه آبیاری بسیار دقیق وجود دارد. طراح این سامانه‌ها، دانشمند معروف قرن دهم، شیخ بهایی (و یا به روایتی غیاث‌الدین جمشید کاشانی) است که حدود دویست سال قبل از برنولی با استفاده از اختلاف ارتفاع و تغییر قطر لوله‌ها فواره‌هایی را ایجاد کرد که آب از همگی آن‌ها تا یک ارتفاع یکسان خارج می‌شود.

آب از ارتفاعات بالادست، به وسیله یک لوله از یک طرف باغ می‌شود و چون انتهای آن بسته است تمام آب ورودی از فواره‌هایی که در طول مسیر با فواصل یکسان قرار دارند، خارج می‌شود. شیب لوله باعث افزایش فشار در طول لوله و اصطکاک آب با دیواره لوله باعث کاهش آن می‌شود. فرض می‌کنیم این دو اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند و باعث می‌شوند سرعت آب در سرتاسر لوله یکنواخت و ثابت باشد. به این ترتیب، با وجود حرکت آب می‌توان قوانین شارهای ساکن را برای آن به کار برد و فرض کرد لوله‌ای افقی و بدون اصطکاک داریم که فشار در طول آن یکسان است. به این ترتیب مقدار پرش آب در تمام فواره‌های یکسانی که در طول مسیر نصب شده‌اند برابر است.



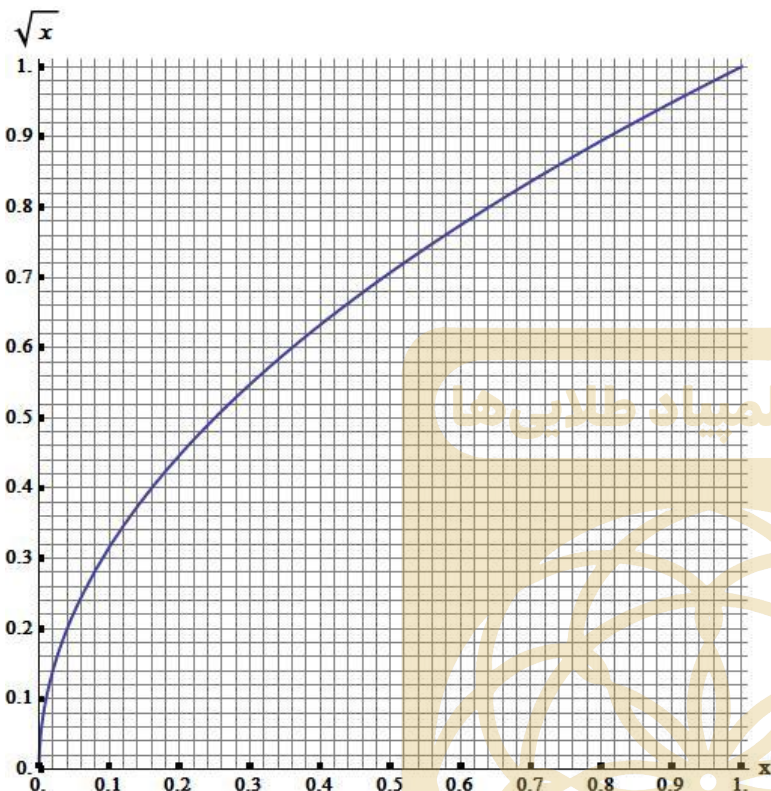
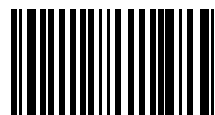
می‌دهد. از ابتدا تا انتهای لوله ۱۰ فواره نصب شده است که شماره آن‌ها را با k نشان می‌دهیم. فواره k ام در انتهای لوله‌ای است که قطر آن D_k و آهنگ شارش حجمی گذرنده از آن Q_k است.

(آ) Q_k را بر حسب Q_1 و k بیابید.

(ب) D_k را بر حسب D_1 و k به دست آورید.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



شکل ۲

پ) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ که در

شکل ۲ داده شده است مقادیر عددی $\frac{D_2}{D_1}$ تا $\frac{D_{10}}{D_1}$ را

تا دو رقم معنی دار به دست آورید. نتایج خود را در یک

جدول نمایش دهید.

حال می‌خواهیم اثر اصطکاک و گرانش را نیز

بررسی کنیم. در فیزیک شاره‌ها نشان می‌دهند که اگر

در لوله‌ای به قطر D آهنگ شارش حجمی Q باشد،

اصطکاک در طولی به اندازه l از لوله باعث افت فشار

$$\Delta p = -\frac{ClQ}{D^4}$$

می‌شود که در آن ضریب ثابت C به

دما و جنس مایع و لوله بستگی دارد. (به این رابطه قانون پوازی می‌گویند).

ت) طول هر کدام از لوله‌ها را l ، چگالی آب را ρ و شتاب گرانش زمین را g بگیرید. برای جبران اثر اصطکاک و ثابت نگه

داشتن سرعت آب درون همه لوله‌ها، اختلاف ارتفاع مورد نیاز، Δh_k ، بین دو سر لوله k ام را بر حسب k ، C ، l ، ρ ، g ،

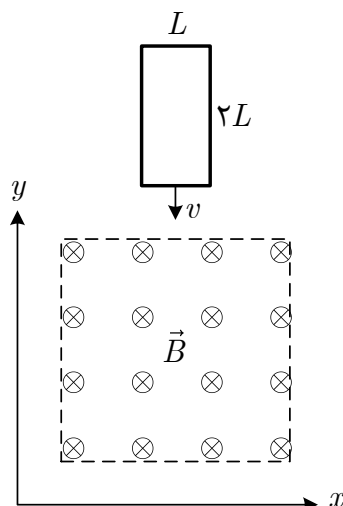
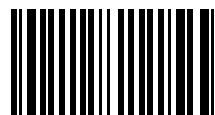
D_1 و Q_1 به دست آورید. این کاهش ارتفاع را به وسط لوله نسبت می‌دهیم.

ث) به ازای مقادیر عددی $l = 3.0 \text{ m}$ ، $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ، $g = 10 \text{ m/s}^2$ ، $C = 0.40 \text{ N.s/m}^2$ ،

$Q_1 = 10 \text{ L/s}$ و $D_1 = 10 \text{ cm}$ مقدار Δh_1 ، Δh_5 و Δh_{10} را بر حسب سانتی‌متر تا دو رقم معنی دار به دست آورید.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



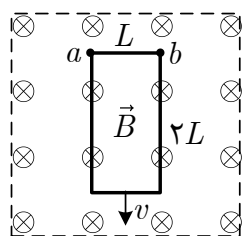
شکل ۱

(۴) یک حلقهٔ رسانا به جرم M و مقاومت الکتریکی R به شکل مستطیلی به ابعاد L و $2L$ است. این حلقه مطابق شکل ۱ با سرعت v در جهت $-y$ وارد ناحیه‌ای می‌شود که در آن میدان مغناطیسی یکنواخت B عمود بر صفحهٔ شکل و به سمت داخل برقرار است. حرکت در خلاء صورت می‌گیرد و میدان گرانشی نیز در کار نیست.

(آ) معین کنید جهت جریان القایی در حلقه هنگامی که بخشی از آن وارد ناحیهٔ میدان مغناطیسی شده، ساعتگرد یا پادساعتگرد است. نشان دهید در این حالت، میدان

مغناطیسی نیروی ترمزی $\vec{F}(t) = -k\vec{v}$ را به حلقه وارد می‌کند که $\vec{v}$ بردار سرعت حلقه است. ضریب k را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

(ب) به جای یک حلقه، یک سیم پیچ با N دور و با همان ابعاد جایگزین می‌کنیم. ضریب k را در این حالت به دست آورید.



شکل ۲

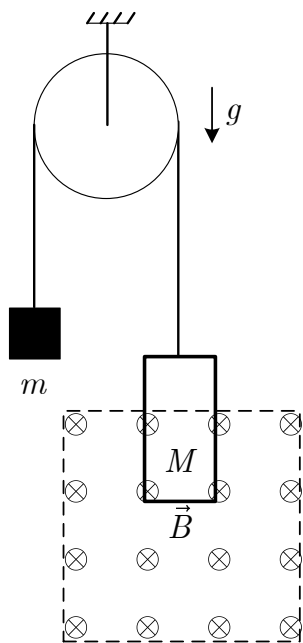
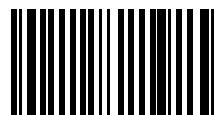
(پ) در حالتی که حلقه مطابق شکل ۲ کاملاً داخل میدان قرار دارد و با سرعت v به حرکت ادامه می‌دهد، بارهای الکتریکی مخالف در دو سمت ضلع‌های به طول L تجمع می‌کنند. در نتیجهٔ این تجمع، میدان الکتریکی در فاصلهٔ بین نقاط a و b ایجاد می‌شود. اختلاف پتانسیل

بین این دو نقطه، $V_b - V_a$ ، چقدر است؟

(ت) دستگاه شکل ۳ را در نظر بگیرید. در این حالت میدان گرانشی g به سمت پایین برقرار است. دستگاه از حالت سکون رها می‌شود. در سمت راست این دستگاه حلقهٔ بخش آ به تدریج از بالا وارد ناحیهٔ میدان می‌شود و سرانجام از آن خارج می‌شود. شتاب دستگاه را در طی مراحل مختلف عبور حلقه از ناحیهٔ میدان بر حسب M ، m ، g ، k و سرعت لحظه‌ای حلقه، v ، به دست آورید. از جرم ریسمان و قرقره و اصطکاک محور قرقره صرف‌نظر کنید.

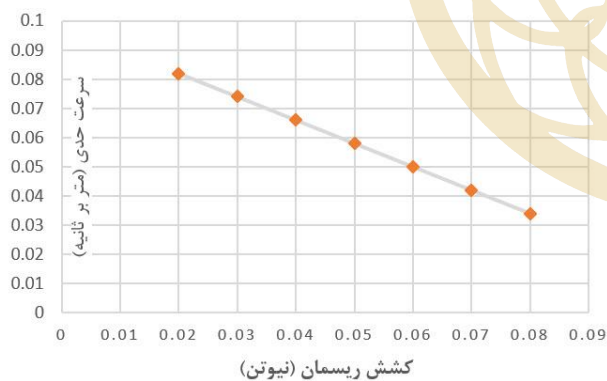


نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



شکل ۳

ج) فرض کنید در لحظه‌ها کردن حلقه، لبه پایینی آن در ارتفاع h بالاتر از لبه بالایی میدان باشد. h را بر حسب m ، M و g و k چنان تعیین کنید که بعد از لحظه $t = 0$ و تا قبل از آن که کاملاً وارد میدان شود، حلقه با سرعت ثابت حدی به حرکت ادامه دهد.



شکل ۴

چ) آزمایشی را با شرایط مذکور در بخش ج و با تغییر جرم m چندین بار تکرار می‌کنیم. در هر بار آزمایش نیروی کشش ریسمان و سرعت ثابت حدی دستگاه را اندازه‌گیری می‌کنیم. در شکل ۴ نمودار سرعت حدی دستگاه بر حسب نیروی کشش ریسمان رسم شده است. با توجه به این نمودار، ضریب k و جرم حلقه را به دست آورید. شتاب جاذبه را $g = 10 \text{ m/s}^2$ بگیرید.

ح) با توجه به نتایج عددی بخش ج و با فرض آن که $B = 0.6 \text{ T}$ ، و سطح مقطع سیمی که حلقه از آن ساخته شده است

ثابت و مقاومت ویژه آن $\rho = 4 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ باشد، چگالی جرمی حلقه، D ، چقدر است؟



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



(۵) در این مسئله با یک مدل ساده فیزیکی طرز کار یک باتری را بررسی می کنیم. در بین دو صفحه رسانای موازی A و B که قطب های + و - باتری هستند یک الکترولیت، یعنی محلولی شامل یون های قابل تحرک، قرار دارد. برای سادگی فرض کنید در الکترولیت مورد نظر ما فقط یک نوع یون قابل تحرک وجود دارد. فرض کنید ناحیه بین دو قطب را با صفحات فرضی موازی با قطب ها به $k+1$ ناحیه (سلول) تقسیم کنیم به طوری که k عدد بسیار بزرگی باشد. هر ناحیه را با یک شماره i مشخص می کنیم که از ناحیه مجاور قطب منفی با $i=0$ شروع می شود و تا ناحیه مجاور قطب مثبت با $i=k$ ادامه می یابد.

فرض کنید در لحظه دلخواه t تعداد $n_i(t)$ یون در ناحیه i قرار دارد. در طی بازه زمانی Δt یک یون با احتمال p از ناحیه i به ناحیه $i+1$ و با احتمال q به ناحیه $i-1$ می رود. در نتیجه با احتمال $1-(p+q)$ سر جای خود می ماند. تعداد یون ها بسیار زیاد است، به طوری که می توان تعداد ذرات در یک ناحیه را با متوسط تعداد در همان ناحیه برابر گرفت.

(آ) تعداد یون ها در ناحیه i در زمان $t + \Delta t$ را بر حسب تعداد یون ها در همان ناحیه و نواحی مجاور در زمان t به دست آورید.

(ب) در حالت پایا تعداد یون ها در هر ناحیه، دیگر به زمان وابسته نیست. در این حالت، تعداد ذرات هر ناحیه را به دست آورید.

راهنمایی: در اینجا به معادله ای به صورت $n_i = \alpha n_{i-1} + \beta n_{i+1}$ می رسید که به معادله فیبوناچی معروف است. برای

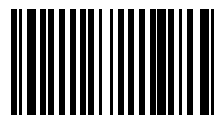
حل این معادله می توانید فرض کنید که جواب به صورت $n_i = x^i$ است. در این صورت دو جواب برای x به دست می آید

که ما آنها را x_1 و x_2 می نامیم. جواب کلی معادله فیبوناچی به صورت $n_i = A_1 x_1^i + A_2 x_2^i$ است. ثابت های A_1 و A_2 را

فعلاً مفروض بگیرید. در بخش های بعدی مسئله، آن ها را تعیین می کنیم.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



پ) مجموع تعداد کل یون‌ها را در نواحی صفر تا k به دست آورید.

ت) بار الکتریکی هر یون را Q بگیرید. در حالت پایا جریان الکتریکی باتری، I ، ثابت و برابر جریان بین هر دو ناحیه مجاور

i و $i+1$ است و می‌تواند به صورت تابعی از Q ، p ، q ، Δt و ثابت‌های A_1 و A_2 باشد. I را به دست آورید.

در یک باتری فرایندهای شیمیایی که در کنار قطب‌ها رخ می‌دهند روی جمعیت یون‌ها تأثیرگذارند. فرض کنید این

فرایندها طوری است که تعداد یون‌ها در ناحیه مجاور قطب منفی مقدار ثابت n_0 و در ناحیه مجاور قطب مثبت مقدار ثابت

n_k باشد. همچنین به دلیل اختلاف پتانسیل V بین قطب‌ها، داخل الکترولیت میدان الکتریکی برقرار می‌شود که باعث

تفاوت q و p می‌شود. برای سادگی فرض کنید $p = (a - bQ \frac{V}{k})\Delta t$ و $q = (a + bQ \frac{V}{k})\Delta t$ که a و b مقادیر

ثابتی هستند. همچنین به دلیل زیاد بودن تعداد نواحی می‌توان فرض کرد که $bQ \frac{V}{k}$ از a بسیار کوچک‌تر است.

راهنمایی: برای $|\varepsilon|$ خیلی کوچک‌تر از ۱ می‌توان از رابطه تقریبی $1 + k\varepsilon \approx (1 + \varepsilon)^k$ استفاده کرد (به شرط آن که $|k\varepsilon|$

نیز خیلی کوچک‌تر از ۱ باشد).

ث) در حالت مدار باز که از باتری جریان الکتریکی نمی‌گذرد، ثوابت وابسته به شرایط مرزی A_1 و A_2 را به دست آورده و

اختلاف پتانسیل بین قطب‌های باتری، V_0 ، را بر حسب ثوابت a ، b ، n_0 ، n_k ، Q و k بیابید.

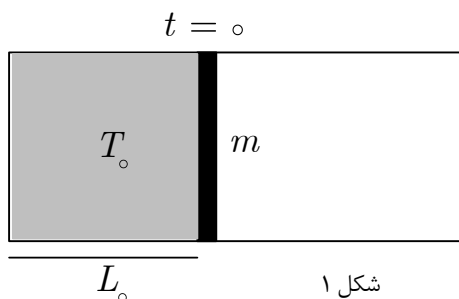
ج) نشان دهید در حالتی که جریان کوچک I در باتری برقرار است، اختلاف پتانسیل بین قطب‌های باتری، V ، به صورت

$V = V_0 - RI$ است که V_0 اختلاف پتانسیل بین قطب‌های باتری در حالت مدار باز است. کمیت R را بر حسب ثوابت

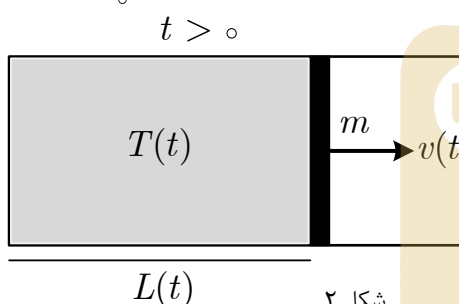
a ، b ، n_0 ، n_k ، Q و k بنویسید.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



شکل ۱



شکل ۲

۶) مقداری گاز آرمانی داخل یک ظرف استوانه‌ای به وسیله پیستونی به

جرم m محبوس شده است. در لحظه $t = 0$ دمای گاز T_0 است و پیستون به

فاصله L_0 از انتهای استوانه نگه داشته شده است. بیرون استوانه خلاء است و

اصطکاک پیستون و استوانه ناچیز است. استوانه و پیستون عایق گرما هستند.

پیستون را رها می‌کنیم تا گاز به طور بی‌دررو منبسط شود و پیستون را به

حرکت درآورد. در لحظه دلخواه t دمای گاز بر حسب کلوین $T(t)$ ، سرعت

پیستون $v(t)$ و فاصله پیستون از انتهای استوانه $L(t)$ است.

لازم به توضیح است که انرژی درونی یک گاز آرمانی در دمای T برابر $U = C_V T$ است. C_V ظرفیت گرمایی گاز

در حجم ثابت نامیده می‌شود و در این مسئله آن را ثابت فرض می‌کنیم. برای یک گاز آرمانی طی یک فرایند بی‌دررو، کمیت

$TV^{\gamma-1}$ مقدار ثابتی است، که T دمای گاز، V حجم گاز و γ عدد ثابتی موسوم به ضریب اتمیسیته است.

آ) با استفاده از پایستگی انرژی، سرعت لحظه‌ای پیستون، $v(t)$ ، را بر حسب دمای لحظه‌ای گاز، $T(t)$ ، و سایر داده‌های

مسئله به دست آورید.

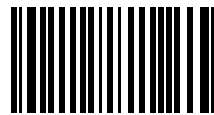
ب) با توجه به ثابت بودن کمیت $TV^{\gamma-1}$ در هر لحظه دلخواه t ، رابطه‌ای بین $\frac{dT(t)}{dt}$ و $\frac{dL(t)}{dt}$ به دست آورید.

منظور از $\frac{dT(t)}{dt}$ مشتق دما نسبت به زمان و منظور از $\frac{dL(t)}{dt}$ مشتق طول L نسبت به زمان است.

پ) از روابط بخش‌های آ و ب، $\frac{dT(t)}{dt}$ را بر حسب $T(t)$ و سایر کمیت‌های ثابت (مستقل از زمان) داده شده به دست آورید.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



ت) معادله به دست آمده در بخش پ را بر حسب متغیرهای بدون یکای فیزیکی (بدون بُعد) x و y که در زیر معرفی می شوند،

بنویسید

$$y(x) = \frac{T(t)}{T_0}, \quad x = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \sqrt{\frac{mL_0}{2C_V T_0}}.$$

ث) حال فرض کنید گاز آرمانی این مسئله تک اتمی است که برای آن $\gamma = \frac{5}{3}$ است. معادله به دست آمده در قسمت ت، تا

زمانی که گاز داخل استوانه محبوس باشد، دارای جوابی به شکل زیر است

$$x = a \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + b \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^{\frac{3}{2}}.$$

ثابت های عددی a و b را با این الزام که جواب پیشنهادی، به ازای هر x و y مجاز باید در معادله بخش ت صدق کند، به

دست آورید.

ج) $y(x)$ را به دست آورید.

راهنمایی: برای حل یک معادله درجه ۳ به صورت $z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ کمیت های زیر را تعریف

می کنیم

$$Q = \frac{1}{9}(3a_2 - a_1^2), \quad R = \frac{1}{54}(9a_1 a_2 - 27a_3 - 2a_1^3),$$

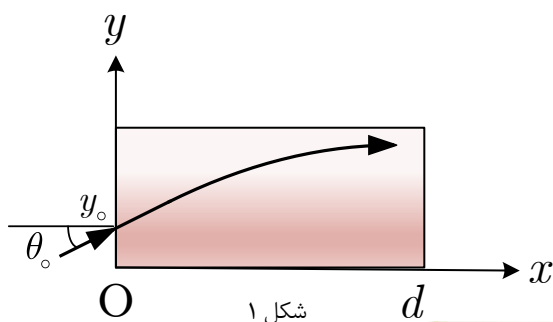
در حالتی که $D = Q^3 + R^2 > 0$ ، معادله فقط یک جواب قابل قبول به صورت زیر دارد

$$z = R + \sqrt{D}^{\frac{1}{3}} + R - \sqrt{D}^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a_1.$$





نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



شکل ۱

(۷) در یک محلول شفاف، به دلیل تفاوت غلظت ماده حل شده،

ضریب شکست می تواند در ارتفاع های مختلف از کف ظرف تفاوت داشته

باشد. در شکل ۱، صفحه $x - y$ برش قائم یک محلول را نشان می دهد

که در ظرفی به شکل مکعب مستطیل ریخته شده است. خط $y = 0$

کف ظرف و خطوط $x = 0$ و $x = d$ دیواره های ظرف را نشان می دهند. بیرون ظرف، هوا با ضریب شکست ۱ است.

باریکه نوری مطابق شکل ۱، در صفحه $x - y$ با زاویه کوچک θ_0 به نقطه $(0, y_0)$ از دیواره سمت چپ می تابد و وارد

محلول می شود. (برای وضوح بیشتر، شکل ها در راستای y بزرگ تر از واقع رسم شده اند.) فرض کنید دیواره های ظرف بسیار

نازک است به طوری که اثر محسوسی در مسئله ندارد. باریکه نور پس از ورود به محلول، همانند پدیده سراب، مسیری خمیده

را طی می کند که معادله آن $y = A \cos[\alpha(x - B)]$ است.

(آ) ضریب شکست متغیر محلول، $n(y)$ ، را بر حسب y ، A ، α و اندازه ضریب شکست محلول در کف ظرف،

$n_0 = n(y = 0)$ ، به دست آورید.

(ب) رابطه به دست آمده در بخش آ را برای مقادیر αA خیلی کوچک تر از ۱ تقریب بزنید. برای این کار با استفاده از راهنمایی

زیر جواب را به صورت یک چندجمله ای از توان های مختلف α بنویسید و سپس از جملات با توان ۳ و بالاتر چشم پوشی کنید.

در ادامه مسئله نیز از همین تقریب استفاده کنید.

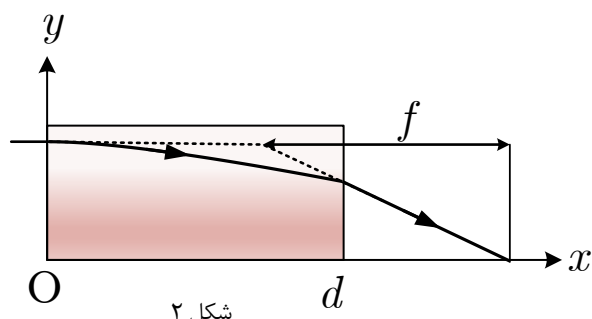
راهنمایی: برای $|\varepsilon|$ خیلی کوچک تر از ۱ می توان از رابطه تقریبی $(1 + \varepsilon)^k \approx 1 + k\varepsilon$ استفاده کرد (به شرط آن که $|k\varepsilon|$

نیز خیلی کوچک تر از ۱ باشد).

(پ) ثابت های A و B را با فرض کوچک بودن θ_0 بر حسب کمیت های α ، y_0 و θ_0 به دست آورید.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



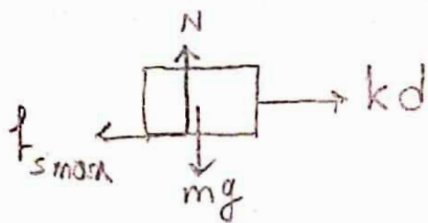
شکل ۲

ت) اگر نور به صورت افقی وارد محلول شود و مطابق شکل ۲ خم شود، فاصله کانونی سامانه، f ، که در شکل مشخص شده است را بر حسب n_o ، α و d تا مرتبه تقریبی که در قسمت ب ذکر شد به دست آورید.

ث) فاصله دیواره سمت راست محلول تا نقطه کانونی را بر حسب n_o ، α و d به دست آورید.

ج) برای این محلول، ضریب شکست به طول موج، λ ، وابسته است و در کف ظرف به صورت $n_o(\lambda) = C + \frac{D}{\lambda^2}$ است که در آن C و D اعداد ثابتی هستند. فرض کنید کمیت α به طول موج بستگی ندارد. اگر نور ورودی به محلول از طول موج λ_1 به λ_2 تغییر کند، میزان جابجایی نقطه کانون را بر حسب λ_1 ، α ، d ، C و D به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد

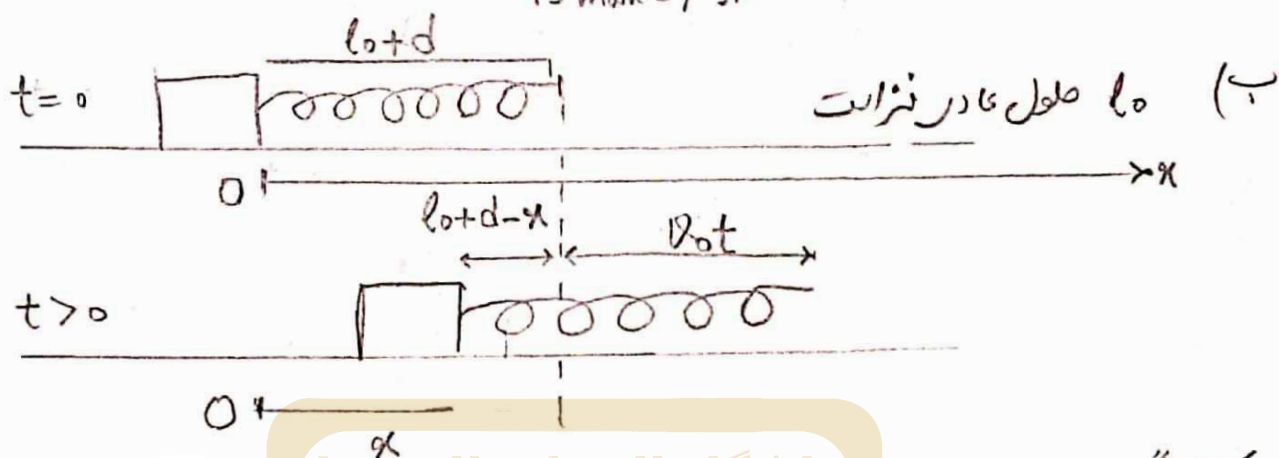


$$N = mg$$

$$kd = f_{smax} \Rightarrow d = \frac{\mu_s mg}{k}$$

$$f_{smax} = \mu_s N$$

(۷)



کشیگی فنر در لحظه t : $(l_0 + d - x + v_0 t) - l_0$ ، در نتیجه

$$N = mg$$

$$k(d - x + v_0 t) - f_k = ma \Rightarrow a = \frac{k}{m} (v_0 t - x) + (\mu_s - \mu_k) g \quad (1)$$

$$f_k = \mu_k N$$

$$a(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} = \omega^2 (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \quad (پ)$$

$$= \omega^2 (A \omega t + B - x(t)) \quad (۲)$$

از معادلات (۱) و (۲) :

$$\omega^2 (A \omega t + B - x) = \frac{k}{m} (v_0 t - x) + (\mu_s - \mu_k) g$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad A \omega^3 = \frac{k}{m} v_0, \quad \omega^2 B = (\mu_s - \mu_k) g \quad \text{در نتیجه}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad B = \frac{mg}{k} (\mu_s - \mu_k)$$

$$l(t) = l_0 + d - x + v_0 t$$

(ت) طول فنر در لحظه t :

$$= l_0 + \frac{\mu_s mg}{k} - A(\omega t - \sin \omega t) - B(1 - \cos \omega t) + v_0 t$$

$$l(t) = l_0 + \frac{\mu_k mg}{k} + A \left(\sin \omega t + \frac{B}{A} \cos \omega t \right)$$

$$\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{g}{v_0} (\mu_s - \mu_k) = \tan \theta \quad \text{اگر بنویسیم}$$

$$\sin \omega t + \frac{B}{A} \cos \omega t = \sin \omega t + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos \omega t$$

$$= \frac{\sin(\omega t + \theta)}{\cos \theta} \quad \text{و با توجه به راههای:}$$

$$l = l_0 + \frac{\mu_k mg}{k} + \frac{A}{\cos \theta} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\sin(\omega t + \theta) = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad \text{بیشترین طول فزاینده اولین بار}$$

$$\sin(\omega t + \theta) = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{\omega} \left(\frac{3\pi}{2} - \theta \right) \quad \text{کمترین طول فزاینده اولین بار}$$

$$x(t) = A \omega t + B - \frac{A}{\cos \theta} \sin(\omega t + \theta)$$

ث) در

$$v(t) = A \omega - \frac{A \omega}{\cos \theta} \cos(\omega t + \theta)$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t + \theta) = \cos \theta$$

$$\omega t + \theta = \theta, 2\pi - \theta, 2\pi + \theta, \dots$$

در $t=0$ که سرعت صفر است.

اولین زمان بعدی که سرعت صفر شود $\omega t + \theta = 2\pi - \theta$ است و لذا

$$t_1 = \frac{2}{\omega} (\pi - \theta)$$

ج) طول فزاینده لحظه t_1 برابر است با $l(t_1) = l_0 + \frac{\mu_k mg}{k} + \frac{A}{\cos \theta} (-\sin \theta)$

و کمترین فزاینده لحظه t_1 : $l(t_1) - l_0 = -\frac{mg}{k} (2\mu_k - \mu_s) < d$

و مدتی که طول می‌گردد طول فزاینده d برابر T ، برابر است با

$$d - (l(t_1) - l_0) = v_0 T \Rightarrow T = \frac{2mg}{k v_0} (\mu_s - \mu_k)$$

P2

$$y_1(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

بخش اول:

$$y_1(0) = -A \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y_1(t) = -A \sin \omega t$$

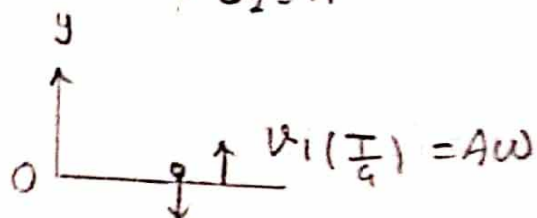
$$v_1(t) = A\omega \sin \omega t$$

$$h = \frac{1}{2} g t_0^2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_0 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega}$$

(۳)

$$\omega = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

$$y_2 = h$$



$$\Rightarrow v_1\left(\frac{T}{4}\right) - v_2\left(\frac{T}{4}\right) = v_2'\left(\frac{T}{4}\right) - v_1'\left(\frac{T}{4}\right) \quad (*)$$

اگر v_0 اندازه سرعت توپ در لحظه رسیدنبه $y=0$ باشد می توانیم $v_2'\left(\frac{T}{4}\right) = 2v_0$ بنویسیم.

یعنی:

$$A\omega - (-v_0) = 2v_0 - A\omega \Rightarrow A\omega = \frac{v_0}{2} \Rightarrow A = \frac{v_0}{2\omega} = \frac{2h}{\pi}$$

پ) بعد از اولین برخورد؛ توپ به سمت بالا با اندازه سرعت $2v_0$ پرتاب و

$$\text{ارتفاع بیشینه از } y=0 \text{ برابر } h_1 = \frac{(2v_0)^2}{2g} = 4h \text{ است.}$$

دومین برخورد نیز در $y=0$ اتفاق می افتد، زیرا زمان رفت توپ به $y=h_1$ وبرگشت آن به $y=0$ برابر $4t_0 = T$ و زمان دومین برخورد $t = T + \frac{T}{4} = \frac{5T}{4}$ است.

$$y_1\left(\frac{5T}{4}\right) = 0 \quad \text{در این لحظه} \quad v_1\left(\frac{5T}{4}\right) = A\omega \text{ است.}$$

مجدداً برخورد در $y=0$ را بررسی می کنیم

$$A\omega - (-2v_0) = v_2'\left(\frac{5T}{4}\right) - A\omega \Rightarrow v_2'\left(\frac{5T}{4}\right) = 3v_0$$

✓ بعد از دومین برخورد؛ توپ به سمت بالا با اندازه سرعت $3v_0$ پرتاب و

$$\text{ارتفاع بیشینه از } y=0 \text{ برابر } h_2 = \frac{(3v_0)^2}{2g} = 9h \text{ است.}$$

سومین برخورد نیز در $y=0$ و در آنجا $6t_0 + 5t_0 = 11t_0 = 11\frac{T}{4}$ اتفاق می افتد.

در این لحظه $v_1\left(\frac{11T}{4}\right) = -Aw$

برخورد در $y=0$:

$$-Aw - (-3v_0) = v_2'\left(\frac{11T}{4}\right) - (-Aw) \Rightarrow v_2'\left(\frac{11T}{4}\right) = 2v_0$$

✓ بعد از سومین برخورد: توجه به سمت بالا با اندازه سرعت $2v_0$ بر تابه و

ارتفاع بلکینه از $y=0$ برابر h $h_3 = \frac{(2v_0)^2}{2g} = 4h$ خواهد بود.

4. دهمین برخورد نیز در $y=0$ و در زمان $4t_0 + 11t_0 = 15t_0 = 15\frac{T}{4}$ اتفاق

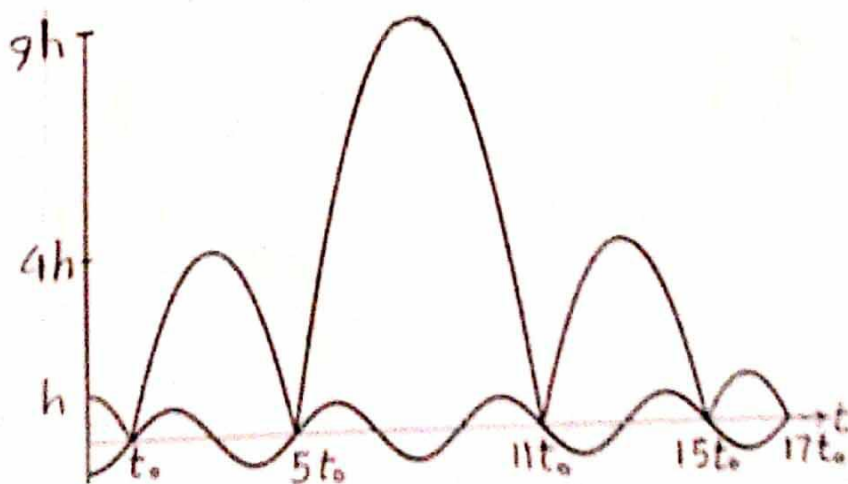
می افتد. در این لحظه $v_1\left(\frac{15T}{4}\right) = -Aw$ برخورد در $y=0$:

$$-Aw - (-2v_0) = v_2'\left(\frac{15T}{4}\right) - (-Aw) \Rightarrow v_2'\left(\frac{15T}{4}\right) = v_0$$

✓ بعد از دهمین برخورد: توجه به سمت بالا با اندازه سرعت v_0 بر تابه و

ارتفاع بلکینه از $y=0$ برابر h $h_4 = \frac{v_0^2}{2g} = h$ خواهد بود.

از این به بعد حرکت تکرار می شود.



(ت)
در صورتی که شکل
گفته شده رسم شده
باشد نیز قابل
قبول خواهد بود

$$y_1(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

کس درم :

$$y_1(0) = 0 \text{ و } v_1(0) < 0 \Rightarrow \phi = \pi \Rightarrow y_1(t) = -A \sin \omega t$$

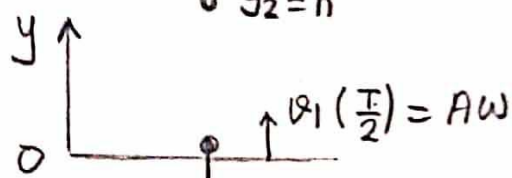
$$v_1(t) = -A\omega \cos \omega t$$

$$h = \frac{1}{2} g t_0^2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_0 = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega}$$

(ث)

$$y_2 = h$$

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{g}{2h}}$$



$$v_2\left(\frac{T}{2}\right) = -\sqrt{2gh} = -v_0$$

$$\Rightarrow v_1\left(\frac{T}{2}\right) - v_2\left(\frac{T}{2}\right) = v_2'\left(\frac{T}{2}\right) - v_1\left(\frac{T}{2}\right)$$

آلر و با اندازه سرعت توپ در لحظه رسیدن

$$v_2'\left(\frac{T}{2}\right) = 2v_0$$

باشگاه المپیک طلایا

$$A\omega - (-v_0) = 2v_0 - A\omega \Rightarrow A\omega = \frac{v_0}{2} \Rightarrow A = \frac{h}{\pi}$$

یعنی :

$$h_1 = \frac{(2v_0)^2}{2g} = 4h \text{ و ارتفاع بیشینه } 2v_0 \text{ به سمت بالا}$$

دومین برخورد در $y=0$ و در زمان $4t_0 + t_0 = 5t_0 = \frac{5T}{2}$ اتفاق می افتد. در این لحظه

$$v_1\left(\frac{5T}{2}\right) = A\omega$$

$$A\omega - (-2v_0) = v_2'\left(\frac{5T}{2}\right) - A\omega \Rightarrow v_2'\left(\frac{5T}{2}\right) = 3v_0$$

$$h_2 = \frac{(3v_0)^2}{2g} = 9h \text{ و ارتفاع بیشینه } 3v_0 \text{ به سمت بالا}$$

سومین برخورد نیز در $y=0$ و در زمان $6t_0 + 5t_0 = 11t_0 = \frac{11T}{2}$ اتفاق می افتد. در این

$$v_1\left(\frac{11T}{2}\right) = A\omega$$

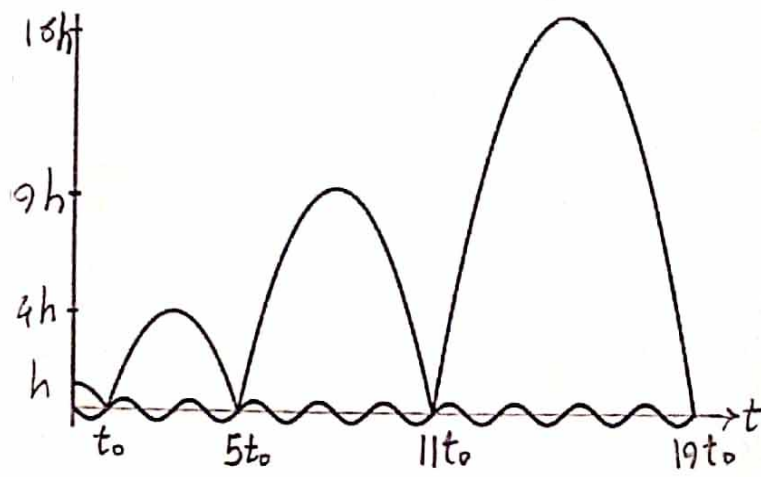
$$A\omega - (-3v_0) = v_2'\left(\frac{11T}{2}\right) - A\omega \Rightarrow v_2'\left(\frac{11T}{2}\right) = 4v_0$$

$$h_3 = \frac{(4v_0)^2}{2g} = 16h \text{ و ارتفاع بیشینه } 4v_0 \text{ به سمت بالا}$$

است.

(ج) وضعیت به ترتیب بالا ادامه می یابد به طوری که بعد از n امین برخورد سرعت

$$v_n = (n+1)v_0 \text{ و ارتفاع بیشینه } h_n = (n+1)^2 h \text{ خواهد بود.}$$

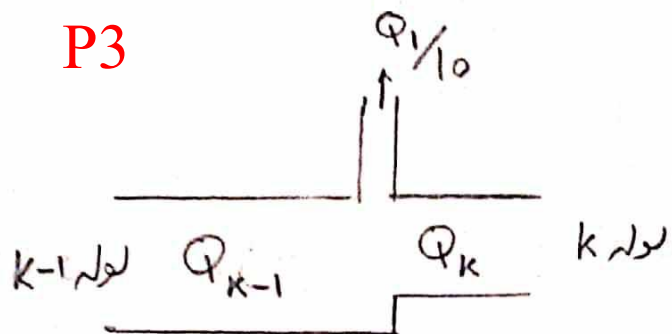


در صورتی که که
که که رسم شده
بازر نیز قابل
قبول خواهد بود

باشگاه المپیاد طلایی‌ها



P3



(A) به دلیل بقای آب درون لوله ها داریم

$$Q_k = Q_{k-1} - \frac{Q_1}{10}$$

$$Q_{k-1} = Q_{k-2} - \frac{Q_1}{10}$$

⋮

$$Q_2 = Q_1 - \frac{Q_1}{10}$$

از جمع روابط فوق

$$Q_k = Q_1 - (k-1) \frac{Q_1}{10} = \left(\frac{11-k}{10} \right) Q_1$$

(ب) اگر D_k قطر لوله k ام باشد و طبق فرض شده سرعت آب در همه

لوله ها یکسان و برابر u باشد آنگاه $Q_k = u A_k$ و $Q_1 = u A_1$ برابری است با

$$Q_k = \pi \left(\frac{D_k}{2} \right)^2 u \quad \text{با استفاده از نتیجه قسمت A:}$$

$$\pi \left(\frac{D_k}{2} \right)^2 u = \frac{11-k}{10} \pi \left(\frac{D_1}{2} \right)^2 u \Rightarrow D_k = D_1 \sqrt{\frac{11-k}{10}}$$

$$\frac{D_{10}}{D_1} = \sqrt{0.1} = 0.32 \quad \text{و} \quad \frac{D_2}{D_1} = \sqrt{0.9} = 0.95 \quad \text{به ازای } k=2 \quad \text{(پ)}$$

والی آخذ

D_2/D_1	D_3/D_1	D_4/D_1	D_5/D_1	D_6/D_1	D_7/D_1	D_8/D_1	D_9/D_1	D_{10}/D_1
0.95	0.89	0.84	0.77	0.71	0.63	0.55	0.45	0.32

با سطح هار دارای اختلاف ± 0.01 با جدول فوق نیز پذیرفته می شود.

(ت) اگر ΔP اختلاف فشار آب بین ابتدا و انتها لوله k و l طول لوله

$$\Delta P = - \frac{c l Q_k}{D_k^4} = \rho g \Delta h_k \quad \text{کام باشد}$$

$$\Delta h_k = - \frac{c l}{\rho g} \frac{Q_1}{D_1^4} \frac{10}{11-k} = - 0.0012 \left(\frac{10}{11-k} \right) m$$

$$\Delta h_1 = - 0.12 \text{ cm}$$

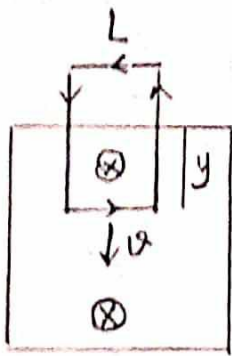
$$\Delta h_5 = - 0.20 \text{ cm}$$

$$\Delta h_{10} = - 1.2 \text{ cm}$$

(ث)

با سطح هار با علامت + شیب قابل قبول است.

(۲) مطابق قانون لenz جهت جریان القای باید بارش معکوس باشد.



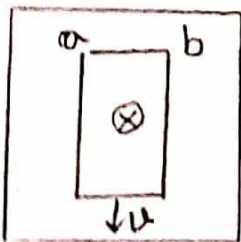
$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (BLy) = -BL \frac{dy}{dt} = -BLv$$

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} = -\vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{F} = - \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

$$k = \frac{B^2 L^2}{R} \quad \text{بنابراین}$$

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\phi}{dt} = -NBLv \quad (۳)$$

$$P = \frac{N^2 B^2 L^2 v^2}{NR} \Rightarrow k = \frac{N B^2 L^2}{R}$$



بنابراین بار الکتریکی q که با سرعت $\vec{v}$ در میدان متناهی $\vec{B}$ حرکت می‌کند نیروی $q\vec{v} \times \vec{B}$ وارد می‌شود. بنابراین الکترون‌ها به سمت a رانده می‌شوند و در b کمبود بار منفی

وجود خواهد داشت. پس یک میدان الکتریکی مانند $\vec{E}$ از b به a به وجود می‌آید.

$$q\vec{E} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow E = vb$$

$$V_b - V_a = v b L \quad \text{اما در نتیجه: } V_b - V_a = EL$$

(۳) در وضعیتی که بخشی از حلقه داخل ناحیه میدان متناهی قرار دارد، شتاب راننده از آن

$$\begin{cases} mg - T - kv = ma \\ T - mg = ma \end{cases}$$

$$T - mg = ma$$

$$a = \left(\frac{m-m}{m+m} \right) g - \frac{kv}{m+m}$$

با زمان تغییر می‌کند و یک شتاب

رو به بالا به حلقه وارد می‌شود.

در سمت A ، $\vec{F} = -k\vec{v}$ ، به سمت A می‌آید.

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - mg = ma \end{cases}$$

$$T - mg = ma$$

$$a = \left(\frac{m-m}{m+m} \right) g$$

در وضعیتی که حلقه خارج از ناحیه

میدان است و یا حلقه داخل ناحیه

میدان است، شتاب راننده از آن با زمان

تغییر نمی‌کند و $\vec{F} = 0$ یا $k=0$.

$$v(t) = \alpha + (v_0 - \alpha)e^{-\beta t}$$

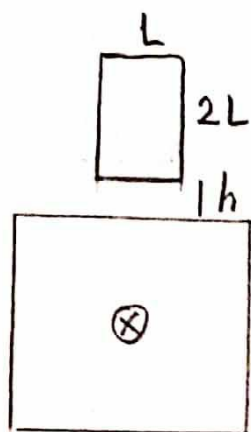
ث)

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0 - \beta (v_0 - \alpha)e^{-\beta t} = -\beta (v - \alpha)$$

با قرار دادن در معادله به دست آمده در قسمت ت :

$$-\beta (v - \alpha) = \left(\frac{m-m}{m+m} \right) g - \frac{k v}{m+m}$$

$$\beta = \frac{k}{m+m} \quad , \quad \alpha = \frac{(m-m)g}{k}$$



ج) در لحظه رسیدن لبه پایینی طبق به لبه بالایی میدان

سرعت سقوط طبق $v_0 = \sqrt{2gh}$ است. می خواهیم

سرعت طبق در لحظه $t=0$ چنان باشد که $v(t)$ متغیر

از چنان باشد. یعنی $v_0 - \alpha = 0$

$$\sqrt{2gh} = \frac{(m-m)g}{k} \Rightarrow h = \frac{(m-m)^2 g}{2k^2}$$

ج) هنگامی که طبق به سرعت صفر حرکت می کند $a=0$ و از قسمت ت داریم

$$v_T = -\frac{1}{k}T + \frac{mg}{k} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{0.03}{0.04} \Rightarrow k = \frac{4}{3} \quad , \quad \frac{mg}{k} = 0.1$$

$$m = \frac{4}{3}(0.01) \text{ kg} \approx 13 \text{ g}$$

$g = 10 \text{ m/s}^2$ ، در نتیجه

$$A \sim R = P \frac{6L}{A} \quad , \quad R = \frac{B^2 L^2}{k} \quad \text{ج) از بخش ت)}$$

معدت سطح مقطع سیم است. همچنین جوی سیم $D = \frac{M}{A(6L)}$ است. در نتیجه

$$D = \frac{M}{6 \left(\frac{6Pk}{B^2} \right)} \Rightarrow D = \frac{MB^2}{36Pk} = \frac{B^2}{36Pg} (0.1) \Rightarrow D = \frac{(0.6T)^2 (0.1)}{36 \times 4 \times 10^{-8} \times 10 \times \frac{m}{s^2}}$$

$$D = 2500 \text{ kg/m}^3$$

P5

$$n_i(t+\Delta t) = P n_{i-1}(t) + q n_{i+1}(t) + (1-P-q) n_i(t) \quad (7)$$

(ب) $n_i(t+\Delta t) = n_i(t)$ در نتیجه

$$n_i(t) = \frac{P}{P+q} n_{i-1}(t) + \frac{q}{P+q} n_{i+1}(t)$$

اگر بنویسیم $\alpha = \frac{P}{P+q}$ و $\beta = \frac{q}{P+q}$ خواهیم داشت

$$n_i = \alpha n_{i-1} + \beta n_{i+1}$$

اگر جواب به صورت $n_i = x^i$ بگذاریم $\Rightarrow \beta x^2 - x + \alpha = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha\beta}}{2\beta} = \frac{(P+q) \pm (P-q)}{2q} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{P}{q} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$n_i = A_1 \left(\frac{P}{q} \right)^i + A_2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k n_i &= \sum_{i=0}^k \left(A_1 \left(\frac{P}{q} \right)^i + A_2 \right) \\ &= A_1 \frac{1 - \left(\frac{P}{q} \right)^{k+1}}{1 - \frac{P}{q}} + A_2 (k+1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (n_i P Q - n_{i+1} q Q) \quad (9)$$

$$= \frac{Q}{\Delta t} \left(P \left(A_1 \left(\frac{P}{q} \right)^i + A_2 \right) - q \left(A_1 \left(\frac{P}{q} \right)^{i+1} + A_2 \right) \right)$$

$$I = \frac{Q}{\Delta t} A_2 (P-q)$$

$$A_2 = 0 \Leftrightarrow I = 0 \quad (ث)$$

$$n_0 = A_1 \quad , \quad n_k = A_1 \left(\frac{P}{q} \right)^k \Rightarrow \left(\frac{P}{q} \right)^k = \frac{n_k}{n_0}$$

$$\left(\frac{n_k}{n_0} \right)^{\frac{1}{k}} = \frac{P}{q} = \frac{(a - bQ \frac{V_0}{k}) \Delta t}{(a + bQ \frac{V_0}{k}) \Delta t} = \frac{1 - \frac{bQ}{a} \frac{V_0}{k}}{1 + \frac{bQ}{a} \frac{V_0}{k}}$$

$$\left(\frac{n_k}{n_0} \right)^{\frac{1}{k}} \approx 1 - 2 \frac{bQ}{a} \frac{V_0}{k} \quad \text{با استفاده از رابطه:}$$

$$V_0 \approx \frac{ak}{2bQ} \left(1 - \left(\frac{n_k}{n_0} \right)^{\frac{1}{k}} \right)$$

$$I = \frac{QA_2}{\Delta t} (P - q) = \frac{QA_2}{\Delta t} \left((a - bQ \frac{V}{k}) \Delta t - (a + bQ \frac{V}{k}) \Delta t \right) \quad (ج)$$

$$I = -2bQ^2 \frac{V}{k} A_2 \Rightarrow A_2 = - \frac{Ik}{2bQ^2 V}$$

$$n_0 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 = n_0 + \frac{Ik}{2bQ^2 V} \quad \text{از شرط دوم}$$

$$n_k = A_1 \left(\frac{P}{q} \right)^k + A_2$$

$$\left(\frac{P}{q} \right)^k = \frac{n_k - A_2}{A_1} = \frac{n_k + \frac{Ik}{2bQ^2 V}}{n_0 + \frac{Ik}{2bQ^2 V}}$$

$$\text{انگیزه: } P = (a - bQ \frac{V}{k}) \Delta t \quad , \quad q = (a + bQ \frac{V}{k}) \Delta t \quad \text{در نتیجه}$$

$$\frac{P}{q} = \frac{a - bQ \frac{V}{k}}{a + bQ \frac{V}{k}}$$

$$\frac{a - bQ \frac{V}{k}}{a + bQ \frac{V}{k}} = \left(\frac{n_k + \frac{Ik}{2bQ^2 V}}{n_0 + \frac{Ik}{2bQ^2 V}} \right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\text{با جایگزینی } \left(\frac{P}{q} \right) \text{ از سمت چپ خواهیم داشت}$$

$$\frac{1 - \frac{bQ}{a} \frac{V}{k}}{1 + \frac{bQ}{a} \frac{V}{k}} = \left(\frac{n_k}{n_0} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1 + \frac{Ik}{2bQ^2 V n_k}}{1 + \frac{Ik}{2bQ^2 V n_0}} \right)^{\frac{1}{k}}$$

با استفاده از رابطه زیر و تقریب اول:

$$1 - \frac{2bQ}{a} \frac{V}{k} \approx \left(1 - \frac{2bQ}{a} \frac{V_0}{k} \right) \left(1 + \frac{I}{2bQ^2 V n_k} - \frac{I}{2bQ^2 V n_0} \right)$$

$$\frac{2bQ}{a} \frac{V - V_0}{k} \approx \frac{I}{2bQ^2 V} \left(\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_k} \right)$$

اما $V - V_0 = RI$ و بار جریان ها کوچک

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{V_0} \left(1 - \frac{RI}{V_0} \right)^{-1} \approx \frac{1}{V_0}$$

بنابراین

$$\frac{2bQ}{ak} RI \approx \frac{I}{2bQ^2 V_0} \left(\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_k} \right)$$

$$R \approx \frac{ak}{2bQV_0} \frac{1}{2bQ^2} \left(\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_k} \right)$$

از کسری ۱ در ششم $V_0 \approx \frac{ak}{2bQ} \left(1 - \left(\frac{n_k}{n_0} \right)^{\frac{1}{k}} \right)$ ، بنابراین

$$R \approx \frac{1}{2bQ^2} \frac{\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_k}}{1 - \left(\frac{n_k}{n_0} \right)^{\frac{1}{k}}}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + C_v T = 0 + C_v T_0 \quad (1)$$

$$(1) \quad v(t) = \sqrt{\frac{2 C_v}{m} (T_0 - T(t))}$$

$$\frac{d}{dt} (T v^{\gamma-1}) = 0 \quad , \quad v = AL \quad (2)$$

A مساحت پستون است.

$$(2) \quad \frac{dT}{dt} L^{\gamma-1} + T(\gamma-1) L^{\gamma-2} \frac{dL}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dL}{dt} = v(t)$$

(3) از روابط (1) و (2) و این $T L^{\gamma-1} = T_0 L_0^{\gamma-1}$ است !

$$(3) \quad \frac{T_0 L_0^{\gamma-1}}{T} \frac{dT}{dt} + (\gamma-1) \left(\frac{T_0 L_0^{\gamma-1}}{T} \right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} T \sqrt{\frac{2 C_v}{m} (T_0 - T)} = 0$$

$$T = T_0 y \quad , \quad t = t_0 x \quad \Leftarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{m L_0^2}{2 C_v T_0}} \quad (4)$$

با قرار دادن در معادله (3)

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + (\gamma-1) y^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{1-y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + (\gamma-1) y^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \sqrt{1-y} = 0$$

(ث) $\gamma = \frac{5}{3}$ گاز

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{3} y^{\frac{5}{2}} \sqrt{1-y} = 0$$

$$(f) \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{3}{2} \frac{1}{y^{5/2} \sqrt{1-y}}$$

$$x = a \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + b \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{2} \left(\frac{-1}{y^2} \right) \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3b}{2} \left(\frac{-1}{y^2} \right) \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(a) \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^{5/2} \sqrt{1-y}} \left(\frac{3b}{2} + \left(\frac{a}{2} - \frac{3b}{2} \right) y \right)$$

از مقایسه (۱۴) و (۱۵) $b=1$ و $a=3$ در نتیجه

$$x = 3 \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$z^3 + 3z - x = 0 \quad \Leftarrow \quad z = \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

یعنی $a_3 = -x$ ، $a_2 = 3$ ، $a_1 = 0$ و

$$Q = 1 \quad , \quad R = \frac{1}{2}x \quad , \quad D = 1 + \frac{1}{4}x^2 > 0$$

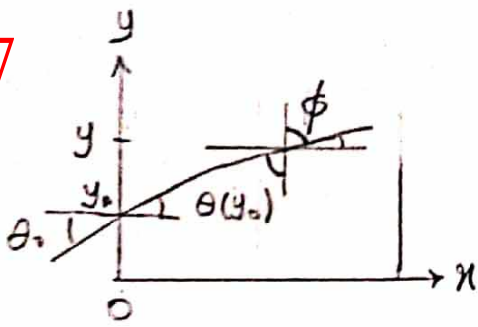
$$\left(\frac{1}{y} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x}{2} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{x}{2} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{در نتیجه}$$

$$\frac{1}{y} - 1 = \left(\frac{x}{2} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{2} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right)^{\frac{2}{3}} - 2$$

به توان ۲ می‌رسانیم

$$y(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{2} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right)^{\frac{2}{3}} - 1}$$

P7



(۲) هنگام ورود نور از هوا به محلول

$$1 \sin \theta_0 = n(y_0) \sin \theta(y_0)$$

در حین عبور نور از لایه‌ها در مختلف محلول

ثابت $n(y) \sin \phi(y) = C$

که ϕ مستقیم زاویه قیاس معنی میر نور با محور x است، یعنی

$$\cot \phi(y) = \frac{dy}{dx} = -A \alpha \sin \alpha (x-B)$$

$$n(y) = C \sqrt{1 + \cot^2 \phi}$$

$$= C \sqrt{1 + A^2 \alpha^2 \sin^2 \alpha (x-B)}$$

$$= C \sqrt{1 + A^2 \alpha^2 - \alpha^2 y^2}$$

$$C = \frac{n_0}{\sqrt{1 + A^2 \alpha^2}}$$

در $y=0$ ، $n(y=0) = n_0$ و در نتیجه

$$n(y) = n_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 y^2}{1 + A^2 \alpha^2}}$$

$$\frac{1}{1 + A^2 \alpha^2} = (1 + A^2 \alpha^2)^{-1} \approx 1 - A^2 \alpha^2$$

$$\frac{\alpha^2 y^2}{1 + A^2 \alpha^2} \approx \alpha^2 y^2 - (\alpha^2 A^2)(\alpha^2 y^2) + \dots \approx \alpha^2 y^2$$

$$n(y) \approx n_0 \sqrt{1 - \alpha^2 y^2} = n_0 (1 - \alpha^2 y^2)^{\frac{1}{2}} \approx n_0 (1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2)$$

$$n(y) \approx n_0 (1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2)$$

$$y(x=0) = y_0 \Rightarrow y_0 = A \cos \alpha B \quad (پ)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \cot \phi(y_0) = \tan \theta(y_0) \Rightarrow \tan \theta(y_0) = A \alpha \sin \alpha B$$

درجهت T راستیم $\sin \theta_0 = n(y_0) \sin \theta(y_0)$ برابر زوایا کوچک

$$\sin \theta_0 \approx \theta_0 \quad \text{و} \quad \sin \theta(y_0) \approx \tan \theta(y_0)$$

$$\theta_0 \approx n(y_0) A \alpha \sin \alpha B$$

$$\begin{cases} y_0 = A \cos \alpha B \\ \frac{\theta_0}{n(y_0)} = A \alpha \sin \alpha B \end{cases} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\sin^2 \alpha B + \cos^2 \alpha B = 1 \quad \text{و} \quad \sin^2 \alpha B + \cos^2 \alpha B = 1$$

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{\theta_0^2}{\alpha^2 n^2(y_0)}}$$

$$\tan \alpha B = \frac{\theta_0}{\alpha y_0 n(y_0)} \quad \text{و} \quad \text{خواص داشته باشد}$$

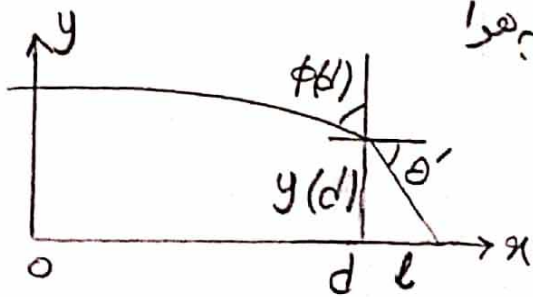
$$B = \frac{1}{\alpha} \text{Arc tan} \left(\frac{\theta_0}{\alpha y_0 n(y_0)} \right)$$

$$y = y_0 \cos \alpha x \Leftrightarrow A = y_0 \Leftrightarrow B = 0 \Leftrightarrow \theta_0 = 0 \quad (ت)$$

$n(y)$ موقع خروج ولی داخل محلول برابری

$$n(y=d) \approx n_0 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y_0^2 \cos^2 \alpha d \right)$$

قانون اسنل در موقع خروج پرتو از محلول به هوا



$$1 \sin \theta' = \cos \phi(d) n(y=d)$$

$$-\cot \phi(d) = -y_0 \alpha \sin \alpha d \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \cos \phi(d) &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \phi(d)}} \\ &= \frac{|\cot \phi(d)|}{\sqrt{1+\cot^2 \phi(d)}} = \frac{\alpha y_0 \sin \alpha d}{\sqrt{1+\alpha^2 y_0^2 \sin^2 \alpha d}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2 y_0^2 \sin^2 \alpha d}} = (1+\alpha^2 y_0^2 \sin^2 \alpha d)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y_0^2 \sin^2 \alpha d$$

$$\cos \phi(d) \approx \alpha y_0 \sin \alpha d$$

در نتیجه با جایگزینی $n(y=d)$

$$\sin \theta' \approx (\alpha y_0 \sin \alpha d) n_0 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y_0^2 \cos^2 \alpha d \right)$$

مطابق شکل $\tan \theta' = \frac{y_0}{f} = \frac{y(d)}{l}$ و با توجه به کوسین بور $\tan \theta' \approx \sin \theta' \approx \theta'$

$$f = \frac{y_0}{\alpha y_0 n_0 \sin \alpha d} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y_0^2 \cos^2 \alpha d} \approx \frac{y_0}{\alpha y_0 n_0 \sin \alpha d} \Rightarrow f \approx \frac{1}{\alpha n_0 \sin \alpha d}$$

$$l = f \frac{y(d)}{y_0} \Rightarrow l \approx \frac{1}{\alpha n_0 \sin \alpha d} \cos \alpha d = \frac{1}{\alpha n_0} \cot \alpha d \quad (2)$$

(ج) از سمت قبل:

$$l_1 - l_2 = \frac{\cot \alpha d}{\alpha} \left(\frac{1}{n_0(\lambda_1)} - \frac{1}{n_0(\lambda_2)} \right)$$

$$= \frac{\cot \alpha d}{\alpha} \frac{n_0(\lambda_2) - n_0(\lambda_1)}{n_0(\lambda_1) n_0(\lambda_2)}$$

پس از جایگزینی از $n_0(\lambda) = c + \frac{D}{\lambda^2}$ خواص داشت

$$l_1 - l_2 = \frac{\cot \alpha d}{\alpha} \frac{D(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(c\lambda_1 + D)(c\lambda_2 + D)}$$