باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی(ره)»

## پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

# آزمون مرحله اول

# بیست و یکمین دورهٔ المپیاد نجوم واخترفیزیک

**نسخه اول**

## کمیته‌ی علمی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

## بهمن ماه ۱۴۰۳

از اساتید و دانش‌پژهان گرامی دعوت می‌شود تا نظرات و پیشنهادات خود را به نشانی الکترونیکی کمیته‌ی المپیاد نجوم ایران ارسال نمایند.

IRAstronomyCommittee@gmail.com

ما را در شبکه‌های اجتماعی دنبال کنید.

@IrAstronomyCommittee

# المپیاد نجوم و اخترفیزیک

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۱/۱۱

مهر حفاظت آزمون

کد ملی:
استان:
نام و نام خانوادگی:
جنسیت داوطلب:
منطقه حوزه:
کد حوزه:
کد داوطلبی: □□□□□□□□□□□□□

لطفاً داخل کادر چیزی ننویسید و گزینه‌ها را با مداد مشکی نرم و به طور کامل پر کنید.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۳ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۵ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۶ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۷ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۸ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۹ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۱۱ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۱۲ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۱۳ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۱۴ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۱۵ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۱۶ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۱۷ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۱۸ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۱۹ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۲۰ | ۱ | ۲ | ۳ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۲۱ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۲۲ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۲۳ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲۴ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۲۵ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۲۶ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۲۷ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۲۸ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲۹ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۳۰ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۳۱ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۳۲ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۳۳ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۳۴ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۳۵ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۳۶ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۳۷ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۳۸ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۳۹ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۴۰ | ۱ | ۲ | ۴ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۴۱ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۴۲ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۴۳ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۴۴ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۴۵ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۴۶ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۴۷ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۴۸ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۴۹ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۵۰ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۵۱ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۵۲ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۵۳ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۵۴ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۵۵ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۵۶ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۵۷ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۵۸ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۵۹ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۶۰ | ۱ | ۲ | ۴ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۶۱ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۶۲ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۶۳ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۶۴ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۶۵ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۶۶ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۶۷ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۶۸ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۶۹ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۷۰ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۷۱ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۷۲ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۷۳ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۷۴ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۷۵ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۷۶ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۷۷ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۷۸ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۷۹ | ۱ | ۲ | ۴ |
| ۸۰ | ۱ | ۲ | ۴ |

سوال شماره ۱

| | باکان | دهگان |
|---|---|---|
| ۰ | ○ | ○ |
| ۱ | ● | ○ |
| ۲ | ○ | ○ |
| ۳ | ○ | ○ |
| ۴ | ○ | ○ |
| ۵ | ○ | ○ |
| ۶ | ○ | ○ |
| ۷ | ○ | ○ |
| ۸ | ○ | ○ |
| ۹ | ○ | ○ |

سوال شماره ۲

| | باکان | دهگان |
|---|---|---|
| ۰ | ○ | ● |
| ۱ | ○ | ○ |
| ۲ | ○ | ○ |
| ۳ | ○ | ○ |
| ۴ | ● | ○ |
| ۵ | ○ | ○ |
| ۶ | ○ | ○ |
| ۷ | ○ | ○ |
| ۸ | ○ | ○ |
| ۹ | ○ | ○ |

سوال شماره ۳

| | باکان | دهگان |
|---|---|---|
| ۰ | ○ | ○ |
| ۱ | ○ | ○ |
| ۲ | ○ | ○ |
| ۳ | ● | ○ |
| ۴ | ○ | ○ |
| ۵ | ○ | ○ |
| ۶ | ○ | ○ |
| ۷ | ○ | ○ |
| ۸ | ○ | ○ |
| ۹ | ○ | ○ |

سوال شماره ۴

| | باکان | دهگان |
|---|---|---|
| ۰ | ○ | ● |
| ۱ | ○ | ○ |
| ۲ | ○ | ○ |
| ۳ | ○ | ○ |
| ۴ | ○ | ○ |
| ۵ | ○ | ○ |
| ۶ | ○ | ○ |
| ۷ | ○ | ○ |
| ۸ | ○ | ○ |
| ۹ | ● | ○ |

سوال شماره ۵

| | باکان | دهگان |
|---|---|---|
| ۰ | ○ | ● |
| ۱ | ○ | ○ |
| ۲ | ○ | ○ |
| ۳ | ○ | ○ |
| ۴ | ○ | ○ |
| ۵ | ○ | ○ |
| ۶ | ○ | ○ |
| ۷ | ○ | ○ |
| ۸ | ○ | ○ |
| ۹ | ● | ○ |

سوال شماره ۶

| | باکان | دهگان |
|---|---|---|
| ۰ | ○ | ● |
| ۱ | ● | ○ |
| ۲ | ○ | ○ |
| ۳ | ○ | ○ |
| ۴ | ○ | ○ |
| ۵ | ○ | ○ |
| ۶ | ○ | ○ |
| ۷ | ○ | ○ |
| ۸ | ○ | ○ |
| ۹ | ○ | ○ |

سوال شماره ۷

| | باکان | دهگان |
|---|---|---|
| ۰ | ● | ○ |
| ۱ | ○ | ○ |
| ۲ | ○ | ○ |
| ۳ | ○ | ○ |
| ۴ | ○ | ○ |
| ۵ | ○ | ○ |
| ۶ | ○ | ○ |
| ۷ | ○ | ○ |
| ۸ | ○ | ○ |
| ۹ | ● | ○ |

سوال شماره ۸

| | باکان | دهگان |
|---|---|---|
| ۰ | ○ | ○ |
| ۱ | ● | ○ |
| ۲ | ○ | ○ |
| ۳ | ○ | ○ |
| ۴ | ● | ○ |
| ۵ | ○ | ○ |
| ۶ | ○ | ○ |
| ۷ | ○ | ○ |
| ۸ | ○ | ○ |
| ۹ | ○ | ○ |

سوال شماره ۹

| | باکان | دهگان |
|---|---|---|
| ۰ | ○ | ○ |
| ۱ | ○ | ○ |
| ۲ | ○ | ○ |
| ۳ | ○ | ○ |
| ۴ | ○ | ○ |
| ۵ | ○ | ○ |
| ۶ | ○ | ○ |
| ۷ | ○ | ○ |
| ۸ | ○ | ○ |
| ۹ | ○ | ○ |

سوال شماره ۱۰

| | باکان | دهگان |
|---|---|---|
| ۰ | ○ | ○ |
| ۱ | ○ | ○ |
| ۲ | ○ | ○ |
| ۳ | ○ | ○ |
| ۴ | ○ | ○ |
| ۵ | ○ | ○ |
| ۶ | ○ | ○ |
| ۷ | ○ | ○ |
| ۸ | ○ | ○ |
| ۹ | ○ | ○ |

اینجانب ..... به کد ملی ..... دفترچه‌ی سوالات المپیاد نجوم و اخترفیزیک شامل ۳۸ سوال را به طور کامل دریافت نمودم.

امضا و اثر انگشت:

* قسمت محاسبات هر سوال، تصویر اسکرین شات (Screenshot) از صفحه‌ی ماشین حساب آنلاین می‌باشد.

---

**سوال ۱ – (گزینه ۱)**

با توجه به بازه طول موج ها میتوانیم مشخصات هر خط طیفی را محاسبه کنیم.

$$\lambda_{\text{سبز}} = 530\ nm\ , \Delta\lambda_{\text{سبز}} = 30\ nm, \lambda_{\text{قرمز}} = 685\ nm\ , \Delta\lambda_{\text{قرمز}} = 65\ nm$$

با توجه به اینکه بیشینه درخشندگی ستاره در مرکز خط سبز است پس طبق قانون وین داریم:

$$T = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{\lambda_{\text{بیشینه}}} \approx 5467\ K$$

حال با توجه به رابطه‌ی داده شده در سوال نسبت مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{I_{\text{سبز}}}{I_{\text{قرمز}}} = \left(\frac{\lambda_{\text{قرمز}}}{\lambda_{\text{سبز}}}\right)^5 e^{\frac{hc}{kT}\left(\frac{1}{\lambda_{\text{قرمز}}} - \frac{1}{\lambda_{\text{سبز}}}\right)} \frac{\Delta\lambda_{\text{سبز}}}{\Delta\lambda_{\text{قرمز}}} = \mathbf{0.54}$$

محاسبات سوال ۱:

| | |
|---|---|
| $\frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{\frac{560+500}{2} \cdot 10^{-9}}$ | $= 5467.924528$ |
| $\frac{(560-500) \cdot 10^{-9}}{\left(\frac{560+500}{2} \cdot 10^{-9}\right)^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\left(\frac{560+500}{2} \cdot 10^{-9}\right) \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 5467.92}}}$ | $= 9.92728326 \times 10^{21}$ |
| $\frac{(750-620) \cdot 10^{-9}}{\left(\frac{750+620}{2} \cdot 10^{-9}\right)^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\left(\frac{750+620}{2} \cdot 10^{-9}\right) \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 5467.92}}}$ | $= 1.8377858 \times 10^{22}$ |
| $\frac{9.92728326 \times 10^{21}}{1.8377858 \times 10^{22}}\|$ | $= 0.5401762958$ |

**سوال ۲ – (گزینه ۳)**

از آنجایی که دمای سحابی از ستاره ها کمتر است پس در هر عکسی که برای طول موج کمتری باشد شدت سحابی هم کمتر است. طبق این استدلال عکس $C$ کمترین طول موج را دارد که متعلق به فرابنفش است و عکس $B$ بیشترین طول موج را دارد که متعلق به فروسرخ است. همچنین اگر دقت کنیم در عکس $A$ رزولوشن تصویر بهتر است که نشان از قوت ابزار اپتیکی به نسبت ابزار فروسرخ و فرابنفش دارد.

**سوال ۳ - (گزینه۲)**

دمای ستاره با وارد شدن به فاز غول سرخ کاهش می‌یابد. انرژی تابش شده در واحد سطح برابر است با:

$$R = \sigma T^4$$

بنابراین انرژی تابش شده در واحد سطح با کاهش دما کاهش پیدا می‌کند و تنها گزینه‌ی درست است.

**سوال ۴ – (گزینه ۴)**

وقتی هر چراغ قابل رویت می‌شود یعنی قدر ظاهری آن به حد قدر چشم انسان (با توجه به ثوابت) مقدار ۶.۵ می‌رسد.

با توجه به فاصله و درخشندگی هر چراغ، و با مقایسه با خورشید ابتدا قدری که بدون جذب هست را حساب می‌کنیم.

ابتدا روشنایی چراغ را در این فاصله حساب می‌کنیم:

$$b_{lamp} = \frac{L_{lamp}}{4\pi d^2} \rightarrow b = 8.84 \times 10^{-9} \frac{w}{m^2}$$

سپس با مقایسه با خورشید قدر ظاهری چراغ در نبود جذب را حساب می‌کنیم:

در ابتدا قدر بلومتریک خورشید را حساب می‌کنیم: (با توجه به دقت گزینه‌ها می‌توانیم از این موضوع صرف نظر کنیم)

$$m_{bol_{sun}} = m_{sun} + BC \rightarrow m_{bol_{sun}} = -26.84$$

$$m_{sun} - m_{lamp} = -2.5 \log\left(\frac{b_{sun}}{b_{lamp}}\right) \rightarrow m_{lamp} = 1.12$$

قدر ظاهری لامپ در حضور جذب برابر ۶.۵ و در صورت نبود جذب ۱.۱۲ است، بنابراین کدرشدگی برابر است با:

$$\frac{6.5 - 1.13}{30} = \mathbf{0.18}\ \frac{\boldsymbol{mag}}{\boldsymbol{km}}$$

محاسبات سوال ۴:

| | |
|---|---|
| $-26.7 - 0.14$ | $= -26.84$ |
| $\frac{100}{4 \cdot \pi \cdot (30000)^2}$ | $= 8.84194128 \times 10^{-9}$ |
| $-26.84 + 2.5 \cdot \log\left(\frac{1361}{8.84194128\times10^{-9}\ \text{ans}}\right)$ | $= 1.128276247$ |
| $\frac{6.5 - 1.128276247\ \text{ans}}{30}$ | $= 0.1790574584$ |

**سوال ۵ – (گزینه ۳)**

ابتدا کل انرژی ساطع شده را محاسبه می‌کنیم، انرژی ساطع شده برابر $10^{10}$ برابر درخشندگی خورشید در مدت ۲ ماه است که اگر افزایش انرژی ساطع شده را به صورت خطی در نظر بگیریم می توان گفت میانگین انرژی ساطع شده برابر نصف کل این انرژی نهایی است.

$$E = \frac{1}{2} \times 10^{10} \times L_{sun} \times (2 \times 30 \times 86400)$$

این انرژی به انرژی جنبشی ذرات تبدیل خواهد شد:

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

بنابراین سرعت حرکت ذرات و سرعت پرتاب مواد برابر است با:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \rightarrow v \approx \mathbf{3 \times 10^6} \ \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$$

محاسبات سوال ۵:

| | |
|---|---|
| $2 \cdot \frac{3.85 \cdot 10^{26} \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 30 \cdot 86400}{1.99 \cdot 10^{30}} \cdot \frac{1}{2}$ | $= 1.00293467 \times 10^{13}$ |
| $\sqrt{1.00293467 \times 10^{13}}$ (ans) | $= 3166914.387$ |

**سوال ۶ – (گزینه ۱)**

ستاره‌ی آبی رنگ دمای بیشتری از خورشید دارد پس طبق نمودار تابش جسم سیاه تمامی نقاط این نمودار بالاتر از نمودار تابش جسم سیاه خورشید است، پس گزینه‌های ۲ و ۴ نمی‌توانند گزینه‌ی صحیح باشند.

از طرفی طبق قانون جا به جایی وین نقطه‌ی ماکزیمم این نمودار باید نسبت به نقطه‌ی ماکزیمم نمودار خورشید در سمت چپ قرار گیرد پس گزینه‌ی ۳ نیز نمی‌تواند گزینه‌ی صحیح باشد.

پس گزینه‌ی ۱ جواب صحیح مسئله است.

**سوال ۷ – (گزینه ۱)**

ابتدا باید قدر ستاره‌ای با قدر ۶.۵ را از پشت تلسکوپ پیدا کنیم.

$$m_{telescope} - m_{eyelimit} = -2.5\log(\left(\frac{8 \times 25.4}{6}\right)^2)$$

$$\rightarrow m_{telescope} = m_{eyelimit} - 2.5\log\left(\left(\frac{8 \times 25.4}{6}\right)^2\right)$$

$$m_{telescope} = -1.14$$

قدر ستاره‌ها در گزینه‌ها به این ترتیب است:

شباهنگ: -1.46

وگا: 0.02

ستاره قطبی: 1.98

میرا (در روشن‌ترین حالت): 2.00

با توجه به گزینه‌ها پاسخ ستاره‌ی **شباهنگ** می‌باشد.

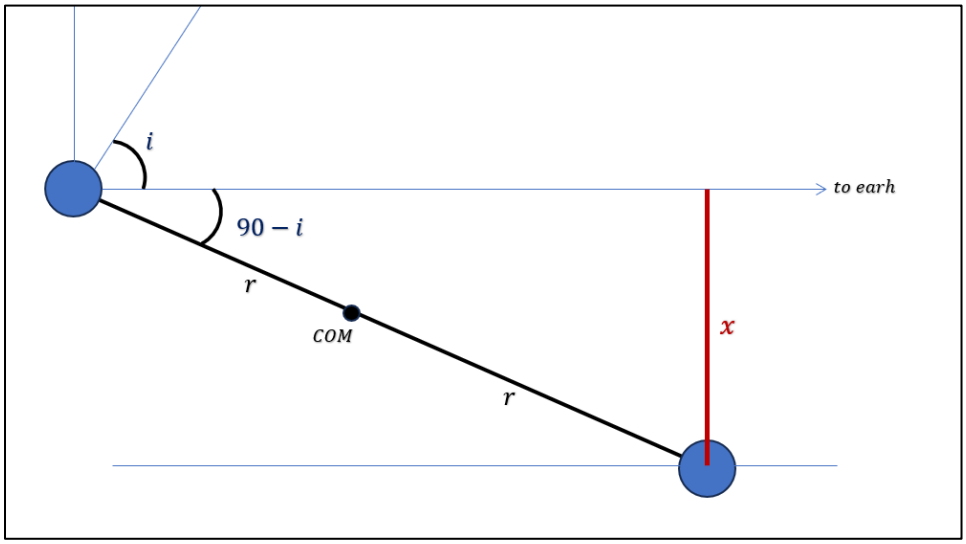
محاسبات سوال ۷:

$$6.5 - 2.5 \cdot \log\left(\left(\frac{8 \cdot 25.4}{6}\right)^2\right) = -1.148862266$$

**سوال ۸ – (گزینه ۴)**

با توجه به انحراف مدار این دوتایی باید ببینیم در کمترین زاویه‌ی جدایی از دید ناظران زمینی آیا ستاره تفکیک‌پذیر است یا خیر.

کمترین جدایی زاویه‌ای دو ستاره از دید ناظران زمینی را با توجه به شکل زیر محاسبه می‌کنیم:




با توجه به شکل طول x باید تفکیک شود، پس اندازه‌ی زاویه‌ای x از دید ناظران زمینی ($\alpha$) را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{2r\cos i}{d} \rightarrow \alpha = \frac{2 \times 5 \times \cos 40}{10 \times 206265} \rightarrow \alpha = 3.7 \times 10^{-6}\ rad$$

حال باید توان تفکیک در هر فیلتر را محاسبه کنیم. می‌دانیم با قطر دهانه‌ی ثابت هر چقدر طول موج رصدی بیشتر باشد، توان تفکیک کمتری داریم پس در هر فیلتر مقدار بیشینه طول موج رصدی را قرار می‌دهیم تا مطمئن باشیم در بازه‌ی کل فیلتر قابل تفکیک است.

طبق رابطه‌ی کوچکترین زاویه‌ی قابل تفکیک بر حسب رادیان داریم:

$$\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

فیلتر اول:

$$\theta = 1.22\frac{350\times10^{-9}}{8\times25.4\times10^{-3}} \rightarrow \theta = 2.1\times10^{-6} < \alpha$$

فیلتر دوم:

$$\theta = 1.22\frac{550\times10^{-9}}{8\times25.4\times10^{-3}} \rightarrow \theta = 3.3\times10^{-6} < \alpha$$

فیلتر سوم:

$$\theta = 1.22\frac{750\times10^{-9}}{8\times25.4\times10^{-3}} \rightarrow \theta = 4.5\times10^{-6} > \alpha$$

طبق اعداد به دست آمده در سه فیلتر، تفکیک فقط در کل بازه‌ی فیلتر اول و دوم صورت خواهد گرفت.

پس تفکیک در **۲ فیلتر** صورت خواهد گرفت.

محاسبات سوال ۸:

| | |
|---|---|
| $\frac{10\cdot\cos(40)}{10\cdot206265}$ | $=3.71388478\times10^{-6}$ |
| $1.22\cdot\frac{350\cdot10^{-9}}{8\cdot25.4\cdot10^{-3}}$ | $=2.10137795\times10^{-6}$ |
| $1.22\cdot\frac{550\cdot10^{-9}}{8\cdot25.4\cdot10^{-3}}$ | $=3.30216535\times10^{-6}$ |
| $1.22\cdot\frac{750\cdot10^{-9}}{8\cdot25.4\cdot10^{-3}}$ | $=4.50295276\times10^{-6}$ |

**سوال ۹ – (گزینه ۲)**

**گزینه ۲** به این علت صحیح نیست که در آزمایش یانگ شدت نور تابشی فقط در شدت روشنایی خطوط تاثیر می‌گذارد و نه فاصله‌ی آنها.

و دیگر گزینه‌ها صحیح می‌باشند.

**سوال ۱۰ – (گزینه ۳)**

یک پارسک برابر فاصله ای است که زاویه اختلاف منظری آن از دید سیاره برابر ۱ ثانیه قوسی باشد. پس تنها نیاز به شعاع مداری این سیاره داریم. شعاع مداری این سیاره ۶ برابر شعاع مداری زمین است پس مقیاس آنها نیز **۶ برابر** پارسک خواهد بود.

محاسبات سوال ۱۰:

$$\frac{9 \cdot 10^{11}}{1.5 \cdot 10^{11}} = 6$$

**سوال ۱۱ – (گزینه ۴)**

ابتدا با استفاده از قانون وین، دمای ستاره را در حالتی که ستاره یک جسم سیاه ایده‌آل باشد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda_{max}T_{blackBody} = 2.9 \times 10^{-3}\ m.K \ \rightarrow \ T_{blackBody} = 8095\ K$$

سپس دمای موثر ستاره را با توجه به درخشندگی و شعاع آن محاسبه می‌کنیم:

$$L = 4\pi r^2 \sigma T_{eff}^4 \rightarrow \ T_{eff} = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi R^2 \sigma}} = 5378\ K$$

با توجه به تعریف انحراف از جسم سیاه، مقدار $\epsilon$ برابر است با:

$$\epsilon = \frac{5378 - 8095}{8095} \rightarrow \ \boldsymbol{\epsilon = -0.34}$$

محاسبات سوال ۱۱:

| | |
|---|---|
| $\sqrt[4]{\frac{3 \cdot 3.85 \cdot 10^{26}}{4 \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot 6.96 \cdot 10^{8}\right)^2 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}}}$ | $= 5378.084824$ |
| $\frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{358 \cdot 10^{-9}}$ | $= 8094.972067$ |
| $\frac{5378 - 8095}{8095}$ | $= -0.3356392835$ |

**سوال ۱۲ – (گزینه ۲)**

نیروی وارد بر یک ذره در خارج یک کره فقط به جرم داخلی کره مربوط است و ربطی به توزیع چگالی آن ندارد! از آنجایی که پتانسیل نیز با تغییر نیرو متناسب است پس پتانسیل نیز فقط به جرم وابسته است. در نتیجه پتانسیل دقیقا هم نسبت نیرو خواهد بود.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{F_1}{F_2} = 2 \rightarrow \boldsymbol{V_1 = 2V_2}$$

**سوال ۱۳ – (گزینه ۳)**

برای حل این سوال کافیست مقدار تکانه‌ی خطی حالت اول و حالت دوم را برابر قرار دهیم:

$$p_1 = p_2$$

در حالت اول سرعت مجموع جرم فضانورد، لباسش و جعبه برابر ۱ متر بر ثانیه می‌شود، شرط حدی بازگشت به ایستگاه فضایی این است که سرعت فضانورد به همراه لباسش پس از پرتاب جعبه ابزار به صفر برسد. بنابراین در عبارت زیر $v_2$ برابر صفر است.

$$(m_{astronaut} + m_{suit} + m_{case})\, v_1 = (m_{astronaut} + m_{suit}) v_2 + m_{case} v_{case_2}$$

در نتیجه:

$$v_{case_2} = \frac{(m_{astronaut} + m_{suit} + m_{case}) \times v_1}{m_{case}} \rightarrow v_{case_2} = 4.8\ \frac{m}{s}$$

سرعت به دست آمده، سرعت پرتاب جعبه ابزار نسبت به دستگاه ثابت است، چون فضانورد با سرعت ۱ متر برثانیه در حرکت بوده کافی است تا سرعت جعبه را نسبت به سرعت اولیه فضانورد محاسبه کنیم:

$$v_{case_{2_{rel}}} = 4.8 - 1 = \boldsymbol{3.8\ \frac{m}{s}}$$

محاسبات سوال ۱۳:

| | |
|---|---|
| $\frac{(120+70+50)}{50}$ | $= 4.8$ |
| $4.8 - 1$ | $= 3.8$ |

**سوال ۱۴ – (گزینه ۲)**

برای حل این سوال مسئله را تحلیل کرده و گزینه‌های اشتباه را حذف می‌کنیم.

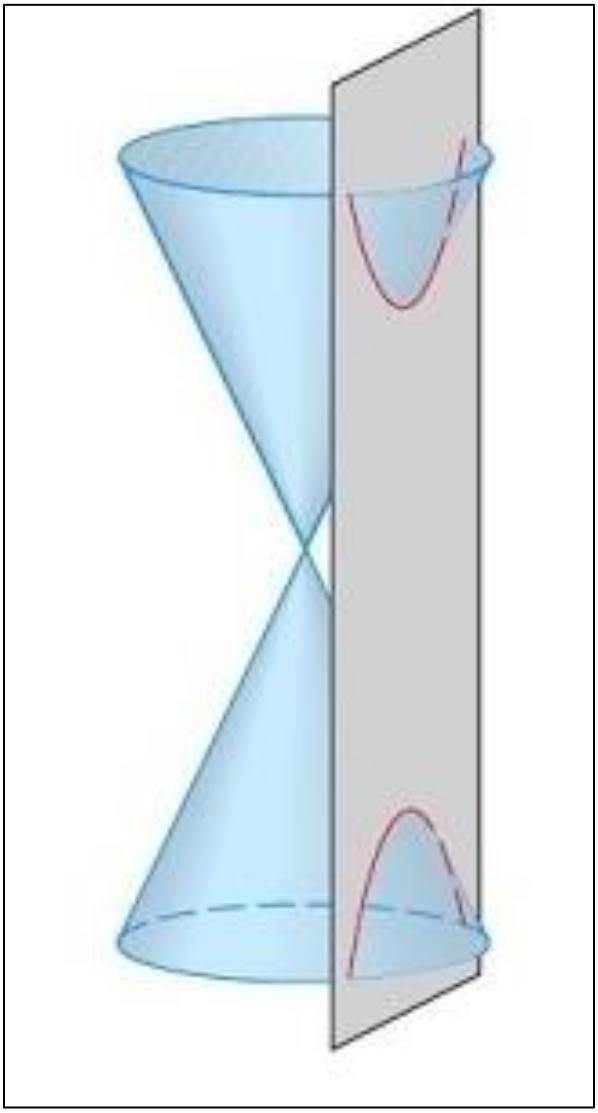
در ابتدا می‌دانیم که در یک مدار بیضوی بردارهای سرعت هنگامی که آنومالی حقیقی برابر $\theta$ و برابر $360 - \theta$ است با یکدیگر برابرند با این تفاوت که به عنوان مثال در مسیر حضیض به اوج سرعت شعاعی مثبت و در مسیر اوج تا حضیض سرعت شعاعی منفی است. بنابراین شکل نمودار سرعت شعاعی باید نسبت به محور افقی قرینه باشد، بنابراین گزینه‌های ۱ و ۴ نادرست هستند.

از طرفی در یک بیضی فقط در دو نقطه سرعت شعاعی صفر می‌شود. در حضیض و اوج. اما در گزینه ی ۳، بیش از دو بار سرعت شعاعی صفر شده است. بنابراین گزینه‌ی ۳ نیز صحیح نیست.

تنها گزینه‌ای که با تحلیل‌ها هماهنگ است **گزینه ۲** می‌باشد.

**سوال ۱۵ – (گزینه ۴)**

وقتی نور اتاق همانند یک مخروط روی دیوار می‌افتد، گویی مخروطی داریم که یک صفحه (دیوار اتاق) آن را موازی با محور اصلی مخروط قطع می‌کند، بنابراین شکل به دست آمده یک **هذلولی** خواهد بود:



**سوال ۱۶ – (گزینه ۱)**

ابتدا پتانسیل گرانشی سفینه‌ی A را محاسبه می‌کنیم. فاصله‌ی این سفینه تا مرکز سحابی برابر ۱.۵ برابر شعاع سحابی است:

$$U = -\frac{GM_{nebula}m_{spaceship}}{r_{spaceship}} \rightarrow U = -\frac{GM_{nebula}m_{spaceship}}{1.5\,R_{nebula}}$$

$$U_A = -\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5 \times 1.99 \times 10^{30} \times 10000}{1.5 \times 50 \times 1.5 \times 10^{11}}$$

$$U_A = -5.89 \times 10^{11}\,J$$

برای سفینه‌ی B می‌دانیم که پتانسیل گرانشی در درون پوسته‌ی کروی برابر با پتانسیل گرانشی بر روی سطح پوسته است، در نتیجه پتانسیل گرانشی سفینه‌ی B برابر پتانسیل گرانشی روی سطح پوسته است:

$$U_B = -\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5 \times 1.99 \times 10^{30} \times 10000}{50 \times 1.5 \times 10^{11}}$$

$$U_A = -8.85 \times 10^{11}\,J$$

اندازه‌ی اختلاف این دو پتانسیل برابر است با:

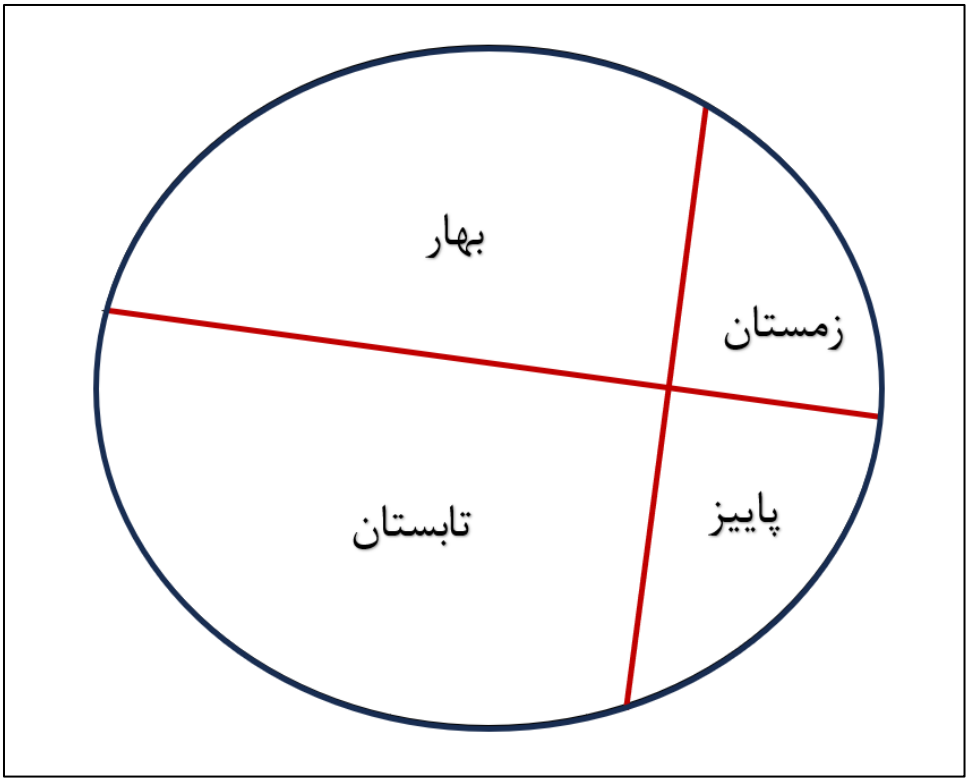
$$\boldsymbol{|U_A - U_B| = 2.95 \times 10^{11}\,J}$$

محاسبات سوال ۱۶:

| | |
|---|---|
| $\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 1.99 \cdot 10^{30} \cdot 10000}{1.5 \cdot 50 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}}$ | $= 5.89924444 \times 10^{11}$ |
| $\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 1.99 \cdot 10^{30} \cdot 10000}{50 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}}$ | $= 8.84886667 \times 10^{11}$ |
| $8.84886667 \times 10^{11} - 5.89924444 \times 10^{11}$ | $= 2.94962223 \times 10^{11}$ |

**سوال ۱۷ – (گزینه ۲)**

طبق قانون دوم کپلر مساحت جاروب شده توسط خط واصل زمین-خورشید شده در واحد زمان ثابت است، پس میزان جاروب کردن مساحت فقط به زمان مربوط است. اگر هنگام حضیض  ناظر زمینی خورشید را در صورت فلکی قوس ببیند پس یعنی در فصل زمستان هستیم (دقت کنید که در حال حاضر اعتدال بهاری در ابتدای صورت فلکی حوت است نه حمل). اگر مرز بین فصول را حرکت ۹۰ درجه ای خورشید در صفحه دایره البروج از دید ما در نظر بگیریم پس با توجه به اینکه اوج مدار در تابستان میفتد پس مساحت بیشتری در فصل تابستان جارو خواهد شد. شکل کیفی(بدون مقادیر دقیق) در زیر آمده است که میتوانید تفاوت فصول را ببینید.



**سوال ۱۸ – (گزینه ۳)**

زاویه بین راستای سایه و راستای شمال در واقع مکمل زاویه سمت است. می‌دانیم که سمت بر حسب زمان به صورت یکنواخت تغییر نمی‌کند و فقط زاویه ساعتی مطابق با زمان عوض میشود. هر چقدر نقطه قطب شمال سماوی در آسمان ناظر به نقطه سرسو نزدیکتر باشد، میزان اختلاف بین سمت و زاویه ساعتی کمتر خواهد بود که نتیجه‌ی آن خطای کمتر در اندازه گیری زمان با این روش است. پس کافی است که ببینیم بین گزینه ها کدام یک عرض جغرافیایی بیشتری دارد که اندازه‌ی کمان بین سرسو و قطب شمال سماوی در آنجا کمتر باشد.

**سوال ۱۹ – (گزینه ۱)**

می‌دانیم در این مثلث رابطه‌ی زیر بین هر ضلع و زاویه‌ی رو به رو به آن برقرار است:

$$A + a = 90\,, B + b = 90\,, C + c = 90$$

$$a = 90 - A\,, b = 90 - B\,, c = 90 - C \;\; (I)$$

یک رابطه‌ی سینوس‌ها برای این مثلث می‌نویسیم:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \overset{(I)}{\rightarrow} \frac{\sin A}{\sin(90 - A)} = \frac{\sin B}{\sin(90 - B)} = \frac{\sin C}{\sin(90 - C)} \rightarrow$$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{\cos C} \rightarrow \tan A = \tan B = \tan C \rightarrow \boldsymbol{A = B = C}$$

**سوال ۲۰ – (گزینه ۱)**

در عرض جغرافیایی ۶۶.۵ درجه زمانی که میل خورشید برابر ۲۳.۵ درجه است خورشید دورقطبی خواهد بود. این اتفاق در روز اول تیر ماه می‌افتد و در این روز طول سماوی خورشید برابر ۹۰ درجه است. با در نظر گرفتن زهره روی دایره‌البروج می‌دانیم که اختلاف طول سماوی زهره و خورشید برابر جدایی زاویه‌ای آن‌ها است.

ابتدا طول سماوی زهره را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda_{sun} - \lambda_{venus} = 30 \rightarrow \lambda_{venus} = 90 - 30 = 60°$$

با توجه به اینکه زهره روی دایره‌البروج است میل آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin \delta_{venus} = \sin \epsilon \sin \lambda_{venus} \rightarrow \delta_{venus} = 20.2°$$

در این عرض جغرافیایی بیشترین ارتفاع یک جرم سماوی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$a_{Max} = 90 - \varphi + \delta \rightarrow a_{Max} = 90 - 66.5 + 20.2 \rightarrow a_{Max} = \mathbf{43.7}$$

محاسبات سوال ۲۰:

| | |
|---|---|
| $90 - 30$ | $= 60$ |
| $\sin(23.5) \cdot \sin(\boxed{60}_{\text{ans}})$ | $= 0.3453268234$ |
| $\sin^{-1}(\boxed{0.3453268234}_{\text{ans}})$ | $= 20.20174755$ |
| $90 - 66.5 + \boxed{20.20174755}_{\text{ans}}$ | $= 43.70174755$ |

**سوال ۲۱ – (گزینه ۲)**

برای به دست آوردن k در معادله‌ی داده شده باید مقدار m و z را در دو نقطه محاسبه کرده و در معادله قرار دهیم.

نقطه‌ی اول را نقطه‌ای با زاویه ساعتی ($H_1 = 0$) و قدر ($m_1 = -0.75$) در نظر می‌گیریم، در این حالت مقدار فاصله‌ی سمت‌الراسی (z) برابر است با:

$$z_1 = \varphi - \delta \rightarrow z_1 = 35 - 20 \rightarrow z_1 = 15$$

نقطه‌ی دوم را نقطه‌ای با زاویه ساعتی ($H_2 = 2^h = 30°$) و قدر ($m_2 = -0.25$) در نظر می‌گیریم، در این حالت مقدار فاصله‌ی سمت‌الراسی (z) با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلث PZX به دست خواهد آمد:

$$\cos z_2 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H \rightarrow z_2 = 30.37°$$

حال مقادیر به دست آمده فاصله‌ی سمت‌الراسی و قدر را برای دو نقطه در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m_1 = m_0 + k \sec z_1 \\ m_2 = m_0 + k \sec z_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -0.75 = m_0 + k \sec 15 \\ -0.25 = m_0 + k \sec 30.37 \end{cases}$$

با کم کردن دو رابطه از هم داریم:

$$-0.75 - (-0.25) = k \sec 15 - k \sec 30.37 \rightarrow k = \frac{0.25 - 0.75}{\sec 15 - \sec 30.37} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{k = 4}$$

محاسبات سوال ۲۱:

| | |
|---|---|
| $35 - 20$ | $= 15$ |
| $\sin(35)\sin(20) + \cos(35)\cos(20)\cos(2 \cdot 15)$ | $= 0.8627987293$ |
| $\cos^{-1}\left(\underset{\text{ans}}{0.8627987293}\right)$ | $= 30.3677085$ |
| $\frac{0.25 - 0.75}{\frac{1}{\cos(15)} - \frac{1}{\cos(30.37)}}$ | $= 4.039756301$ |

**سوال ۲۲ – (گزینه ۱)**

پاسخ این سوال را اگر این شب‌ها به آسمان نگاهی انداخته باشید به راحتی متوجه خواهید شد.

همچنین اگر صورت فلکی میزبان هر سیاره در این شب‌ها را بدانید می‌توان پاسخ سوال را پیدا کرد. چون در اواسط بهمن هستیم خورشید در صورت فلکی جدی قرار دارد و نقطه‌ی مقابله خورشید در حال حاضر در مرکز صورت فلکی سرطان قرار میگیرد. مریخ در صورت فلکی جوزا، مشتری در ثور، زحل در دلو و زهره در حوت قرار دارند که مریخ از همه به نقطه‌ی مقابل خورشید نزدیک تر است.

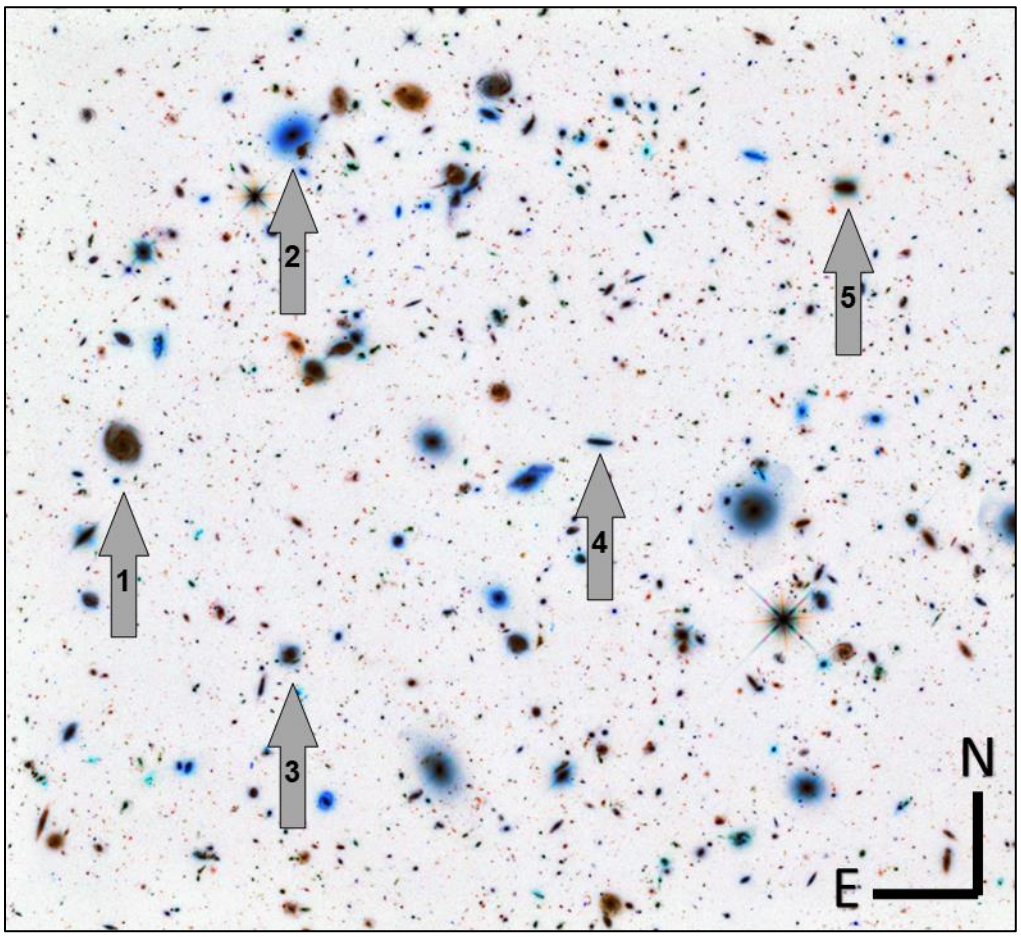
**سوال ۲۳ – (گزینه ۴)**

۲ عبارت اصلی در مورد میل و بعد کهکشان مورد نظر داده شده است:

در مورد میل گفته شده که میل کهکشان مگوت‌ها از میل تنها یک یا دو کهکشان دیگر بیشتر است. با توجه به شکل و با توجه به علامت N می‌توانیم بفهمیم که هر چه کهکشان در تصویر بالاتر باشد میل آن بیشتر است و از عبارت اول کهکشان‌های ۱و ۴ کاندید خواهند شد. دقت کنید که کهکشان ۲ شامل این شرط نمی‌شود چون میل آن از میل ۳ کهکشان بیشتر است در صورتی که در سوال گفته شده میل آن تنها از میل تنها یک یا دو کهکشان بیشتر است.

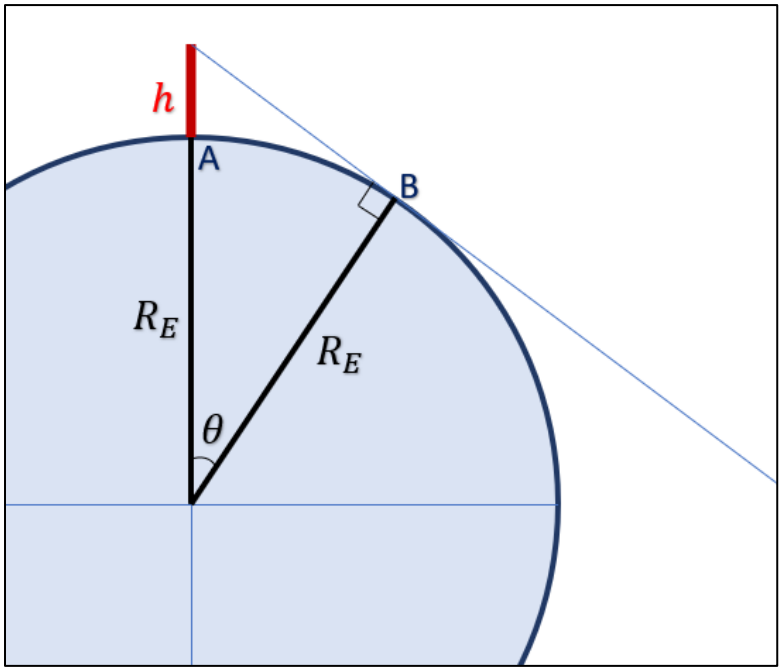
در مورد بُعد گفته شده که که بعد کهکشان مگوت‌ها از بعد تنها دو یا سه کهکشان کمتر است. با توجه به شکل و با توجه به علامت E می‌توانیم بفهمیم که هر چه کهکشان راست‌تر باشد بعد آن کمتر است و از عبارت دوم کهکشان‌های ۲ و ۴ کاندید خواهند شد. دقت کنید کهکشان ۵ شامل این شرط نمی‌شود چون بعد آن از بعد ۴ کهکشان بیشتر است در صورتی که در سوال گفته شده بعد آن تنها از بعد دو یا سه کهکشان بیشتر است.

اشتراک دو عبارت فوق **کهکشان شماره‌ی ۴** خواهد بود.



**سوال ۲۴ – (گزینه ۲)**

در شکل زیر نقطه‌ی A شهر تهران  نقطه‌ی B دورترین نقطه‌ی است که می‌تواند گنبد نوری را رصد کند.




باید طول کمان AB را محاسبه کنیم:

$$\cos\theta = \frac{R_E}{R_E + h} \rightarrow \theta = 2.27°$$

پس طول کمان AB برابر است با:

$$AB = R_E\,\theta^{rad} \rightarrow AB \approx \mathbf{250\ km}$$

محاسبات سوال ۲۴:

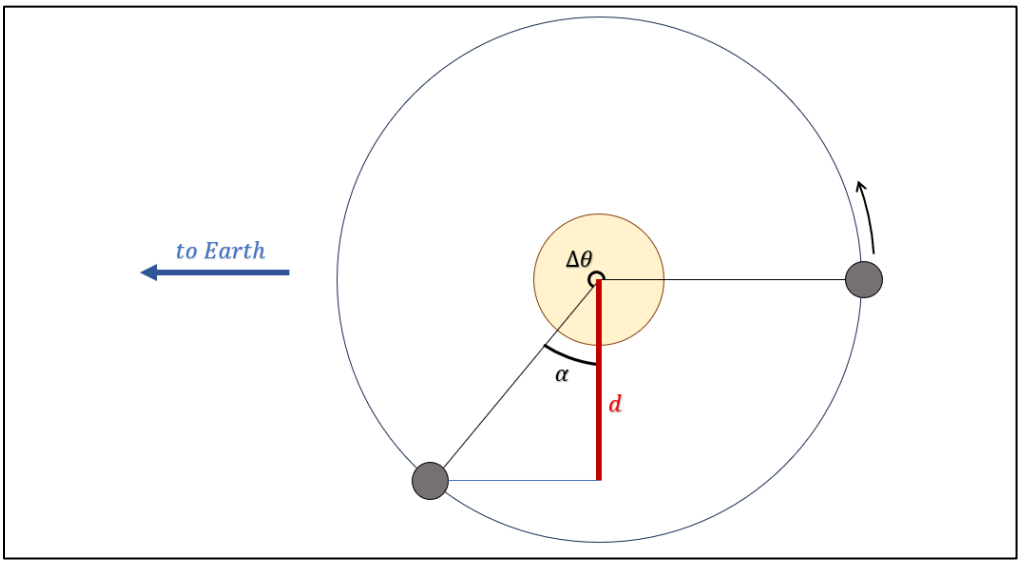
| | |
|---|---|
| $\cos^{-1}\left(\frac{6378}{6378+5}\right)$ | $= 2.267976572$ |
| $2.267976572_{\text{ans}} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 6378$ | $= 252.4645741$ |

**سوال ۲۵ – (گزینه ۳)**

با توجه به شکل زیر مقدار چرخش گانیمد به دور مشتری را محاسبه می‌کنیم:

$$\omega_{Ganymede} = \frac{360}{T_{Ganymede}}$$

$$\Delta\theta = \omega\,\Delta t \rightarrow \Delta\theta = \frac{360}{7} \times 4 \rightarrow \Delta\theta = 205.7°$$



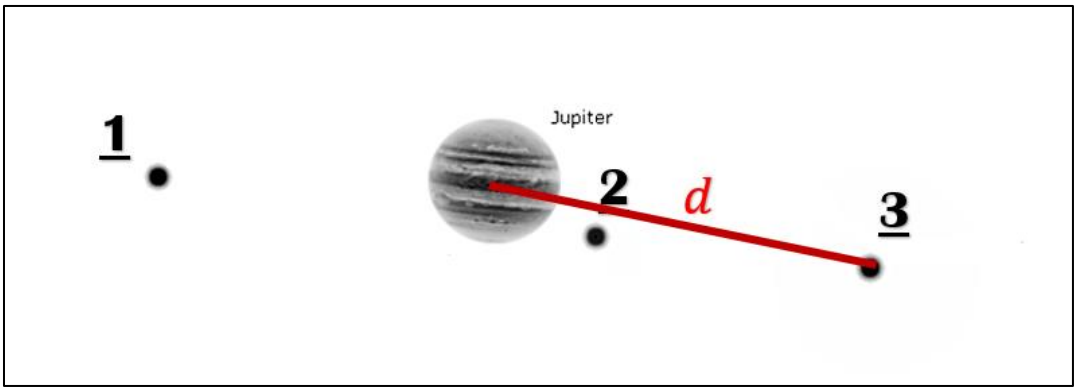

باید طول خط d را بر حسب شعاع مشتری محاسبه کنیم:

$$\alpha = 270 - \Delta\theta$$

$$d = r_{Ganymede} \times \cos\alpha \rightarrow d = 4.3 \times 10^5\ km$$

نسبت به شعاع مشتری مقدار d برابر است با:

$$d = \frac{4.3 \times 10^5\ km}{69911\ km} \rightarrow d = 6.2\ R_{Jupiter}$$



پس با توجه به ابعاد شکل **قمر ۳** در شکل دوم گانیمد است.

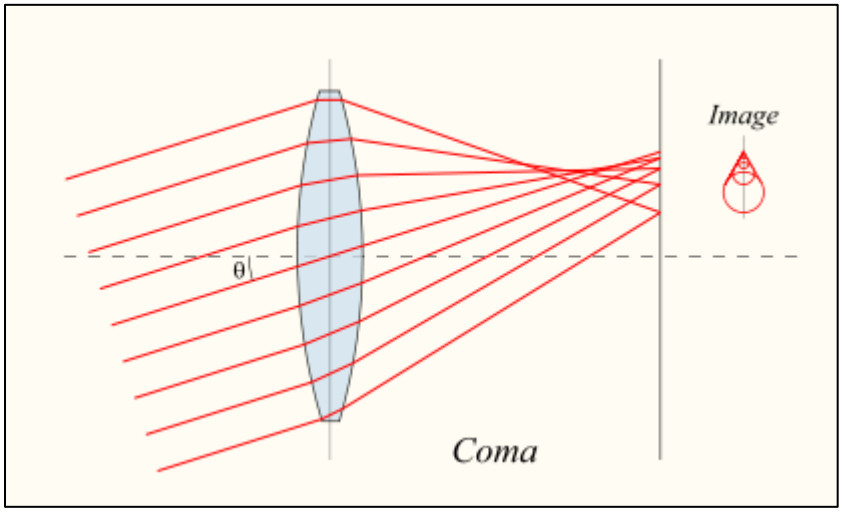
محاسبات سوال ۲۵:

| | |
|---|---|
| $\frac{360}{7} \cdot 4$ | $= 205.7142857$ |
| $270 - \boxed{205.7142857}_{\text{ans}}$ | $= 64.28571429$ |
| $10^6 \cdot \cos\left(\boxed{64.28571429}_{\text{ans}}\right)$ | $= 433\,883.7391$ |
| $\frac{\boxed{433883.7391}_{\text{ans}}}{69\,911}$ | $= 6.206229908$ |

**سوال ۲۶ – (گزینه ۳)**

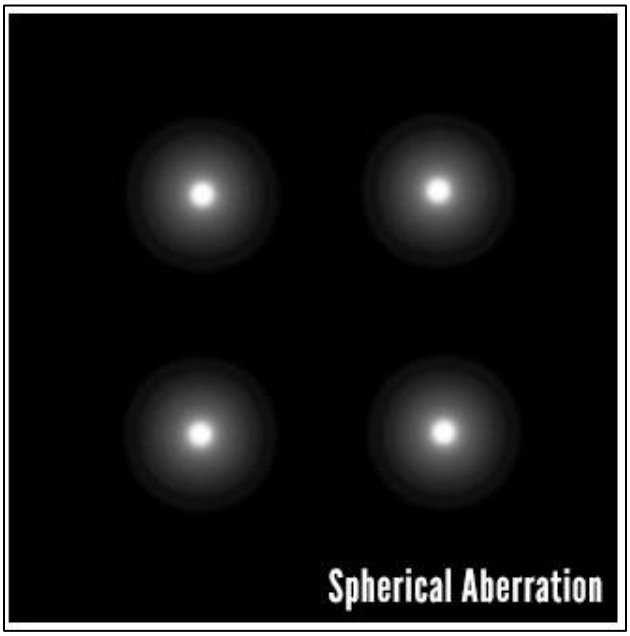
**کما**، ابیراهی اپتیکی متداولی در ابزارهاست که در آن پرتوهای نوری که با فاصله‌ی متفاوت از محور اصلی اپتیکی به ابزار می‌رسند در نقاط متفاوتی کانونی می‌شوند و این باعث می‌شود که در راستاهای مختلف نور غیرکانونی کشیده داشته باشیم.

ابیراهی کما:

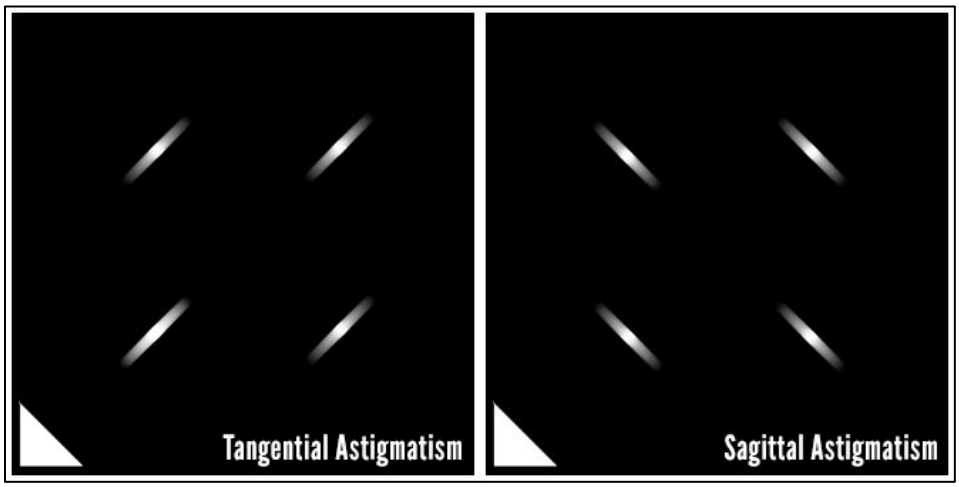



نمونه‌های تصویری از خطاهای گزینه‌های دیگر:

ابیراهی کروی



ابیراهی آستیگماتیسم




ابیراهی واپیچش

(انحنای افق در عکس زیر حاصل این ابیراهی است)

**سوال ۲۷ – (گزینه ۲)**

دوره تابش غالب را از شروع عمر کیهان تا لحظه ای که نسبت ماده و تابش برابر می‌شوند در نظر می‌گیریم. از آنجایی که چگالی ماده با ضریب مقیاس به صورت $a^{-3}$ افت پیدا می‌کند و چگالی تابش به صورت $a^{-4}$، پس نسبت چگالی ها با توان یک ضریب مقیاس افت پیدا می‌کند. در حال حاضر می‌توانیم این نسبت چگالی را بدست بیاوریم.

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_r} = \frac{0.3}{9 \times 10^{-5}} = \frac{1}{a_{eq}} \Rightarrow a_{eq} = 3 \times 10^{-4}$$

که $a_{eq}$ مقیاس برابری ماده و تابش است. حال اگر جهان را پس از دوره‌ی تابش به صورت کامل ماده غالب تخمین بزنیم و چون ضریب مقیاس فعلی برابر ۱ است پس خواهیم داشت:

$$\frac{a_{eq}}{a_0} = \left(\frac{t_{eq}}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow t_{eq} = t_0 \times a_{eq}^{\frac{3}{2}}$$

اگر $t_0$ را سن کیهان در نظر بگیریم که تقریبا *13.7* میلیارد سال است در نتیجه از **مرتبه چند ده هزار سال** خواهد شد. دقت کنید که فرض جهان ماده غالب فرض لزوما درستی نیست اما تقریب مناسبی از مرتبه‌ی سن کیهان به ما خواهد داد.

**سوال ۲۸ – (گزینه ۴)**

هر سه مورد مطابق با بررسی های علمی از تابش پس زمینه کیهانی (*CMB*) است.

**سوال ۲۹ – (گزینه ۳)**

از آنجایی که در سوال فرض صلب بود دیسک کهکشان مطرح شده است پس همه‌ی نقاط آن سرعت زاویه‌ای برابری خواهند داشت. در نتیجه تغییرات سرعت زاویه ای صفر خواهد بود و $\frac{d\Omega}{dR} = 0$ است. پس $\boldsymbol{A = 0}$ خواهد شد و $B = -\Omega$. تنها گزینه ای که با این شرایط پارامترهای $A, B$ هماهنگ است گزینه‌ی ۳ می‌باشد. اگرچه با استفاده از دوره تناوب چرخش ما به دور کهکشان سرعت زاویه نیز بدست خواهد آمد.

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{226 \times 10^6 \times 365.25 \times 86400} \times 3.09 \times 10^{16}$$

$$\mathbf{B = -\Omega = -27.2 \frac{km}{s.kpc}}$$

محاسبات سوال ۲۹:

$$\frac{2\pi}{226 \cdot 10^6 \cdot 365.25 \cdot 86400} \cdot 3.09 \cdot 10^{16} = 27.22237057$$

**سوال ۳۰ – (گزینه ۲)**

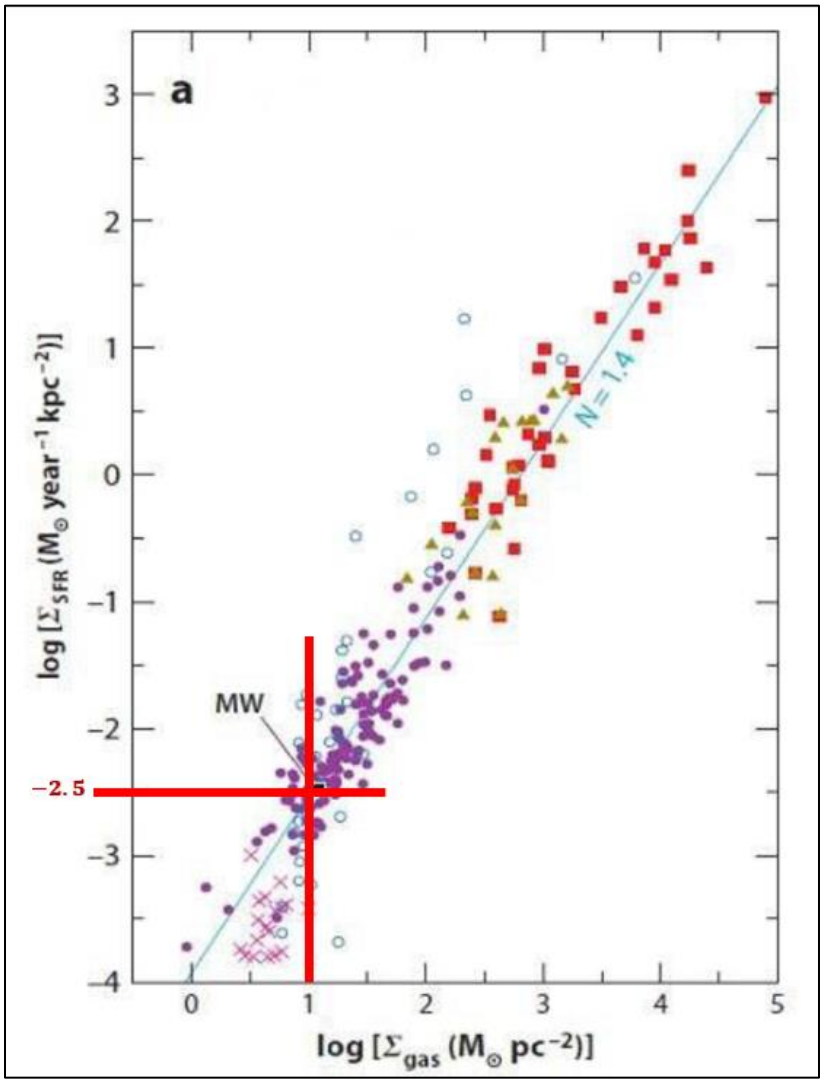
چگالی سطحی گاز طبق داده‌های مسئله برابراست با:

$$\sum_{gas} = 10\, M_{\odot} pc^{-2}$$

در محور افقی که لگارتیمی هست مقدار لگاریتم چگالی سطح گاز داده شده را پیدا می‌کنیم:

$$\log \sum_{gas} = \log 10 = 1$$

حال از روی نمودار مقدار لگاریتم نرخ تشکیل ستاره در واحد سطح کهکشان را بدست می‌آوریم:




$$\log \sum_{SFR} \approx -2.5$$

بنابراین مقدار نرخ تشکیل ستاره در واحد سطح کهکشان برابر است با:

$$\sum_{SFR} = 10^{-2.5}\ M_{\odot}\ year^{-1}\ kpc^{-2}$$

برای به دست آوردن مقدار نرخ تشکیل ستاره‌ای (SFR) کافیست تا مساحت کهکشان را در عبارت فوق ضرب کنیم:

$$SFR = 10^{-2.5} \times \pi \times r^2 \rightarrow SFR = 10^{-2.5} \times \pi \times 10^2$$

$$\boldsymbol{SFR \approx 1\ M_{\odot}\ year^{-1}}$$

محاسبات سوال ۳۰:

$$10^{-2.5} \cdot \pi \cdot 10^2 = 0.9934588266$$

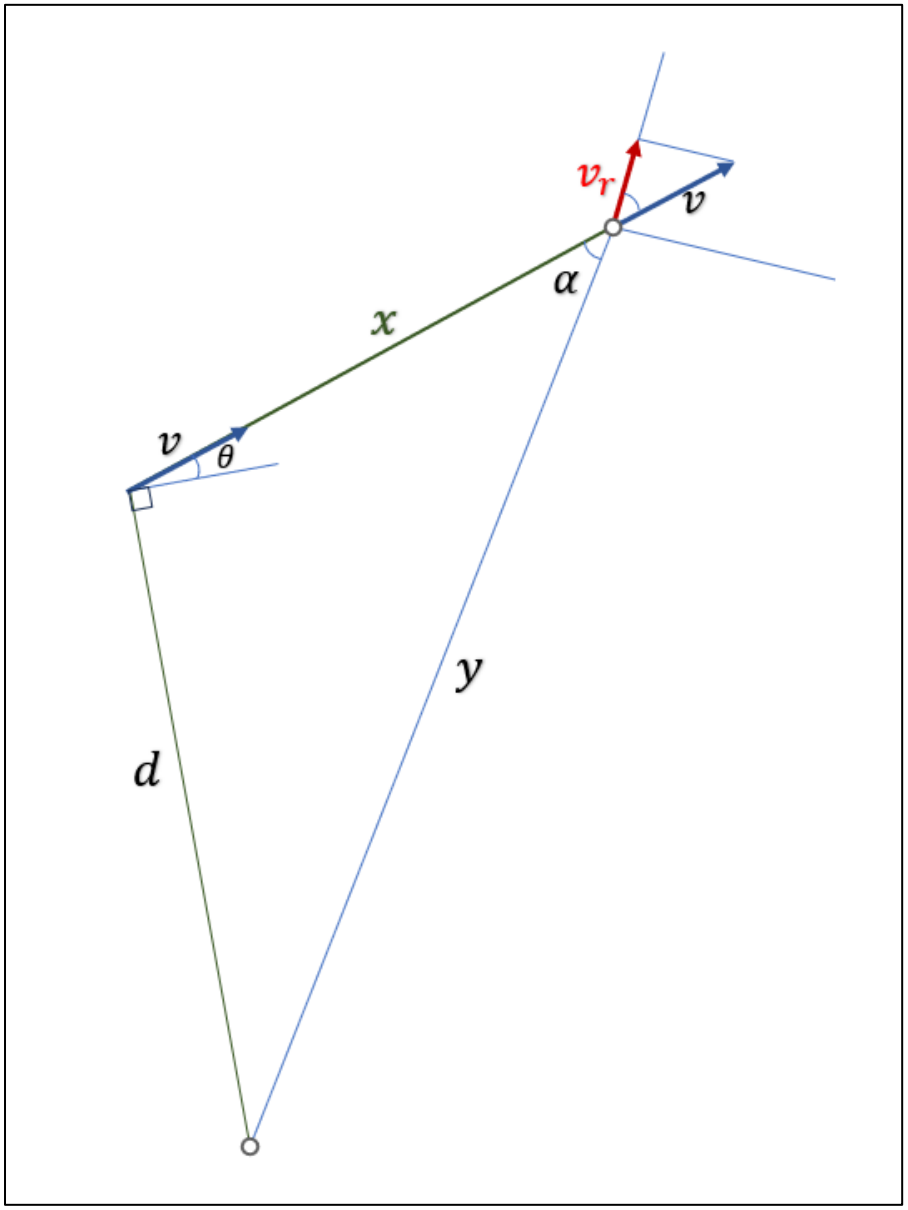
**سوال ۱ پاسخ کوتاه – (جواب: 61)**

ابتدا سرعت حرکت ستاره را محاسبه می‌کنیم و می‌دانیم از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{v_{\perp} + v_r}$$

فاصله‌ی اولیه‌ی ستاره با توجه به اختلاف منظر برابر است با:

$$d = \frac{1}{\pi} \rightarrow d = \frac{1}{0.2} \rightarrow d = 5\ pc$$



محاسبه‌ی سرعت مماسی ($v_\perp$):

$$v_\perp = \omega.r \rightarrow\ v_\perp = 2.5 \times \frac{1}{206265} \times \frac{1}{365.25 \times 86400} \times 5 \times 3.09 \times 10^{13}$$

$$v_\perp = 59.34\ \frac{km}{s} \quad (I)$$

محاسبه‌ی سرعت شعاعی ($v_r$):

با استفاده از جا به جایی در خط هیدروژن آلفا و اثر دوپلر می‌توانیم سرعت شعاعی ستاره را محاسبه کنیم:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} \rightarrow v_r = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}.c \rightarrow v_r = 32\ \frac{km}{s} \quad (II)$$

سرعت حرکت ستاره در فضا برابر است با:

$$v = \sqrt{v_\perp + v_r} \xrightarrow{(I),(II)} v = 67.4\ \frac{km}{s}$$

حال حساب می‌کنیم در مدت ۱۰۰ هزار سال چند پارسک حرکت کرده است (مقدار x در تصویر)

$$x = v\,\Delta t \rightarrow x = 67.4 \times (10^5 \times 365.25 \times 86400) \rightarrow x = 6.88\,pc$$

برای محاسبه‌ی سرعت شعاعی در حالت دوم می‌بایست زاویه‌ی $\alpha$ را محاسبه کنیم.

برای اینکار ابتدا باید زاویه‌ی $\theta$ را محاسبه کنیم:

$$\tan\theta = \frac{v_r}{v_\perp} \rightarrow \tan\theta = \frac{32}{59.34} \rightarrow \theta = 28.34$$

در مثلث زیر ابتدا ضلع $y$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y^2 = d^2 + x^2 - 2.d.x.\cos(90 + \theta) \rightarrow y = 10.25\,pc$$

سپس برای محاسبه‌ی زاویه‌ی $\alpha$ از رابطه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\alpha}{d} = \frac{\sin(90 + \theta)}{y} \rightarrow \sin\alpha = \frac{\sin(90 + \theta)}{y}.d \rightarrow \alpha = 25.43$$

برای محاسبه‌ی سرعت شعاعی در این حالت داریم:

$$v_r = v\cos\alpha \rightarrow v_r = 67.4 \times \cos 25.43 \rightarrow \boldsymbol{v_r = 61\frac{km}{s}}$$

محاسبات سوال ۱ پاسخ کوتاه:

$$\frac{1}{0.2} = 5$$

$$2.5 \cdot \frac{1}{206265} \cdot \frac{1}{365.25 \cdot 86400} \cdot 5 \cdot 3.09 \cdot 10^{13} = 59.33883072$$

$$\frac{6563.5 - 6562.8}{6562.8} \cdot 3 \cdot 10^{5} = 31.99853721$$

$$\sqrt{59.34^{2} + 32^{2}} = 67.41836248$$

$$\frac{67.4 \cdot \left(10^{5} \cdot 365.25 \cdot 86400\right)}{3.09 \cdot 10^{13}} = 6.88343767$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{32}{59.34}\right) = 28.33644259$$

$$\sqrt{5^{2} + 6.88^{2} - 2 \cdot 5 \cdot 6.88 \cdot \cos\left(90 + \boxed{28.33644259}_{\text{ans}}\right)} = 10.24647216$$

$$\frac{\sin(90 + 28.34)}{\boxed{10.24647216}_{\text{ans}}} \cdot 5 = 0.4294874126$$

$$\sin^{-1}\left(\boxed{0.4294874126}_{\text{ans}}\right) = 25.43503446$$

$$67.4 \cdot \cos\left(\boxed{25.43503446}_{\text{ans}}\right) = 60.86710972$$

**سوال ۲ پاسخ کوتاه – (جواب: 12)**

ابتدا دمای تعادل برای این سیاره را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{L_{sun}}{4\pi d^2} \times \pi R^2 \times (1-\alpha) \times \frac{1}{4\pi R^2} = \sigma T^4$$

$$T_{eql} = \sqrt[4]{\frac{L}{16\pi\sigma r^2}(1-\alpha)} = 180.7\ K$$

با توجه به رابطه‌ی داده شده در سوال سرعت وزش باد را محاسبه می‌کنیم:

$$v = \sqrt{25000 \times \frac{2\pi}{2 \times 86164} \times (221.3 - 10)} = \mathbf{12.47}\,\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$$

محاسبات سوال ۲ پاسخ کوتاه:

| | |
|---|---|
| $\sqrt[4]{\frac{3.85 \cdot 10^{26}}{16 \cdot \pi \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (1.5 \cdot 1.5 \cdot 10^{11})^2} \cdot (1-0.6)}$ | $= 180.7489123$ |
| $\sqrt{25000 \cdot \frac{2\pi}{86164 \cdot 2} \cdot (180.7 - 10)}$ | $= 12.47379996$ |

**سوال ۳ پاسخ کوتاه – (جواب: 14)**

چون خوشه در حالت تعادل است با استفاده از قضیه‌ی ویریال داریم:

$$2K + U = 0$$

سحابی را گاز کامل در نظر گرفته بنابراین انرژی جنبشی آن برابر است با:

$$K = \frac{3}{2}NkT$$

همچنین انرژی پتانسیل خودگرانشی سحابی برابر است با:

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

برای محاسبه‌ی شعاع خوشه از قطر زاویه‌ای ($\theta$) داده شده و فاصله‌ی آن استفاده می‌کنیم:

$$2R = d\,\theta^{rad} \rightarrow R = 1001 \times 3.09 \times 10^{16} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{206265} \rightarrow R = 2.25 \times 10^{14}\ m$$

طبق ویریال:

$$2 \times \frac{3}{2}NkT - \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = 0$$

با توجه به اینکه سحابی از هیدروژن تشکیل شده است، تعداد ذرات ($N$) برابر است با:

$$N = \frac{M}{\overline{m}}\ ,\overline{m} = m_p \rightarrow N = \frac{M}{m_p}$$

بنابراین دمای ستاره برابر است با:

$$T = \frac{1}{3 \times \frac{M}{m_p} \times k}\left(\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\right) \rightarrow T = \frac{m_p GM}{5Rk}$$

$$\boldsymbol{T = 14.3\,k}$$

محاسبات سوال ۳ پاسخ کوتاه:

$$1001 \cdot 3.09 \cdot 10^{16} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{206265} = 2.24935641 \times 10^{14}$$

$$\frac{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{5 \cdot \boxed{2.24935641 \times 10^{14}}_{\text{ans}} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}} = 14.28196669$$

**سوال ۴ پاسخ کوتاه – (جواب: 09)**

مقدار نیروی تابشی را از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم:

$$F_{\text{تابش}} = \frac{bA}{c} = \frac{L_{\text{خورشید}} \times \pi R^2_{\text{زمین}}}{4\pi d^2_{\text{زمین}} \times c} = 5.8 \times 10^8\ N$$

در نتیجه مرتبه بزرگی عدد فوق طبق توضیحات آزمون ۹ می‌باشد.

$$\frac{1361 \cdot \pi \cdot (6378000)^2}{3 \cdot 10^8} = 579770045.1$$

**سوال ۵ پاسخ کوتاه – (جواب: 90)**

ابتدا مولفه شعاعی سرعت در یک $\theta$ دلخواه را مینویسیم:

$$v_r = v\cos(45-\theta+\psi) = (v\cos\psi\cos(45-\theta) - v\sin\psi\sin(45-\theta))$$
$$= \frac{\mu}{h}\big((1+e\cos\theta)\cos(45-\theta) - e\sin\theta\sin(45-\theta)\big)$$
$$= \frac{\mu}{h}(\cos(45-\theta) + e\cos(\theta+45-\theta)) = \frac{\mu}{h}\left(\cos(45-\theta) + \frac{e}{\sqrt{2}}\right)$$

در نتیجه بیشترین مقدار سرعت شعاعی در $\theta = 45°$ و برابر است با:

$$v_{r_{Max}} = \frac{\mu}{h}\left(1+\frac{e}{\sqrt{2}}\right)$$

با استفاده از دوره تناوب ابتدا نیم قطر اطول مدار بیضی را محاسبه می‌کنیم:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{sun}}a^3 \rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{M_{sun}}{4\pi^2}T^2} \rightarrow a = 2.3\times10^{11}$$

تکانه زاویه‌ای واحد جرم عبارت است از:

$$h = \sqrt{GM_{sun}a(1-e^2)}$$

بنابراین سرعت شعاعی بیشینه برابر است با:

$$\boldsymbol{v_{r_{Max}} = 90\ \frac{km}{s}}$$

محاسبات سوال ۵ پاسخ کوتاه:

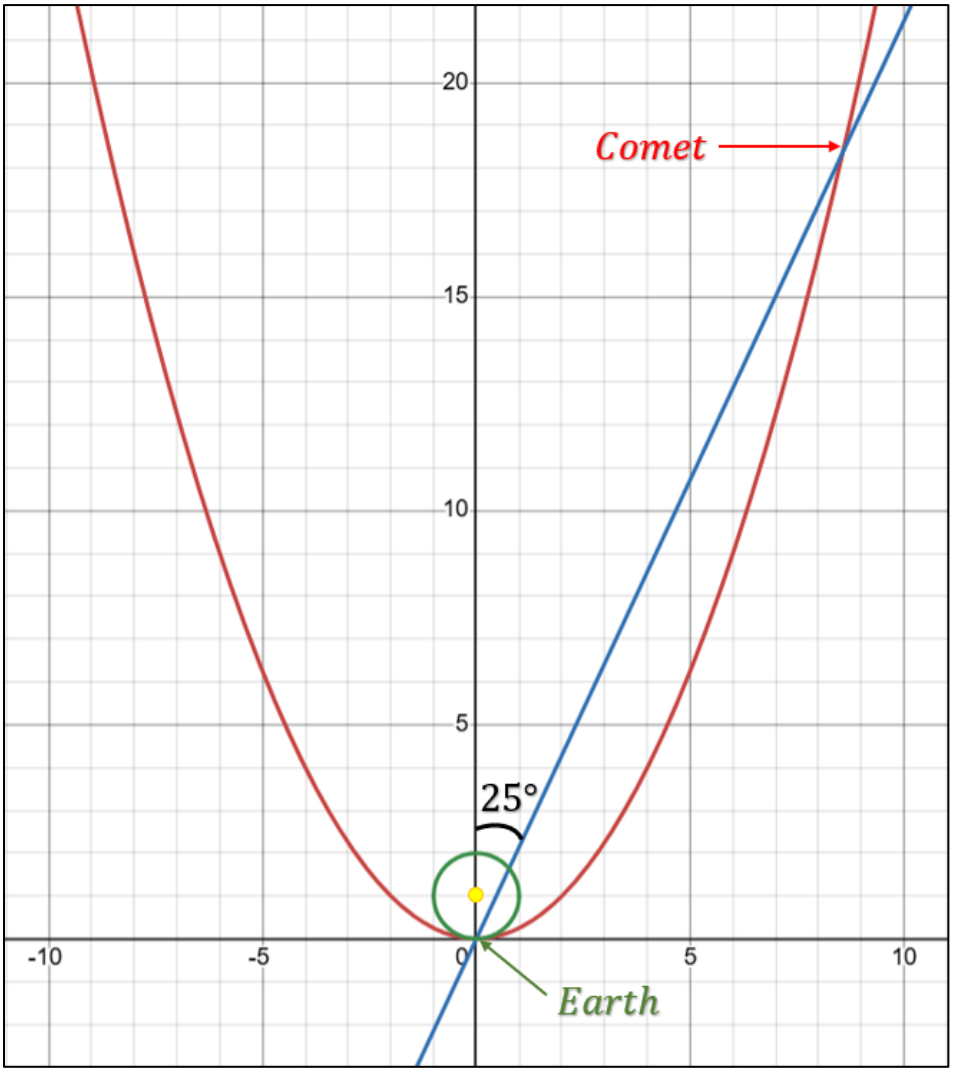
$$\sqrt[3]{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot1.99\cdot10^{30}}{4\cdot\pi^2}\cdot(700\cdot86400)^2} = 2.30823973\times10^{11}$$

$$\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot1.99\cdot10^{30}}{\sqrt{6.67\cdot10^{-11}\cdot1.99\cdot10^{30}\cdot\underbrace{2.30823973\times10^{11}}_{\text{ans}}\cdot(1-0.9^2}} = 90024.48277$$

**سوال ۶ کوتاه پاسخ – (جواب: 20)**

برای حل این سوال کافیست با توجه به شکل، معادله‌ی دکارتی سهمی را نوشته و نقطه‌ای که دنباله دار در آن قرار دارد را بیابیم:

می‌دانیم حضیض دنباله‌دار برابر ۱ واحد نجومی است، بنابراین معادله‌ی مدار دنباله‌دار چنین است:




$$y = \frac{x^2}{4}$$

زمین که در حضیض دنباله دار قرار دارد آن را در کشیدگی ۲۵ درجه رصد می‌کند، پس زاویه‌ی خط واصل زمین و دنباله‌دار با جهت مثبت محور x برابر ۶۵ درجه است.

$$\theta = 90 - 25 = 65$$

بنابراین مولفه های نقطه‌ای که این دنباله‌دار قرار دارد به این صورت است:

$$x = d\cos 65\ , y = d\sin 65$$

با جایگذاری نقطه‌ی فوق در معادله‌ی سهمی فاصله‌ی d به دست خواهد آمد:

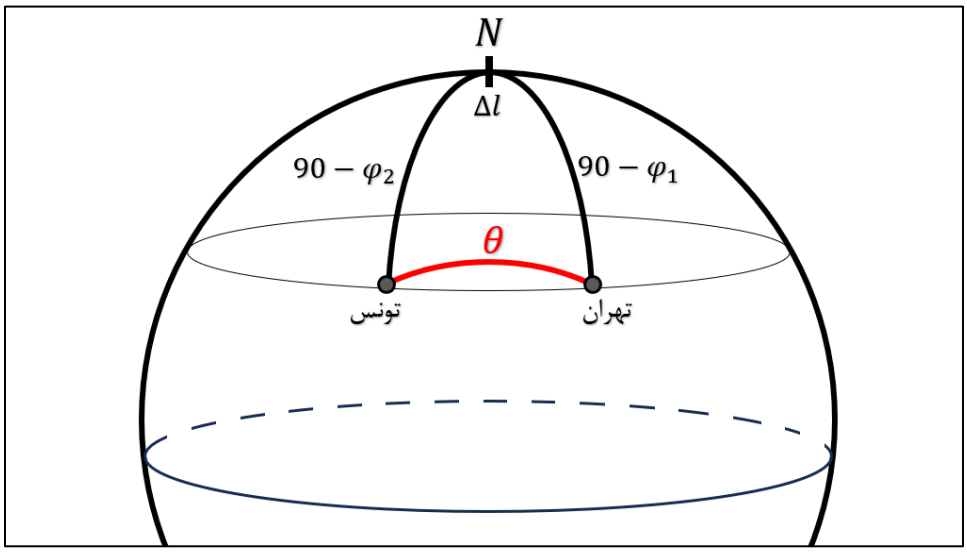
$$d\sin 65 = \frac{(d\cos 65)^2}{4} \rightarrow d = \frac{4\sin 65}{\cos^2 65} \rightarrow \boldsymbol{d = 20.3\ AU}$$

محاسبات سوال ۶ پاسخ کوتاه:

$$\frac{4\cdot\sin(65)}{\cos^2(65)} = 20.29734268$$

**سوال ۷ کوتاه پاسخ – (جواب: ۱۹)**

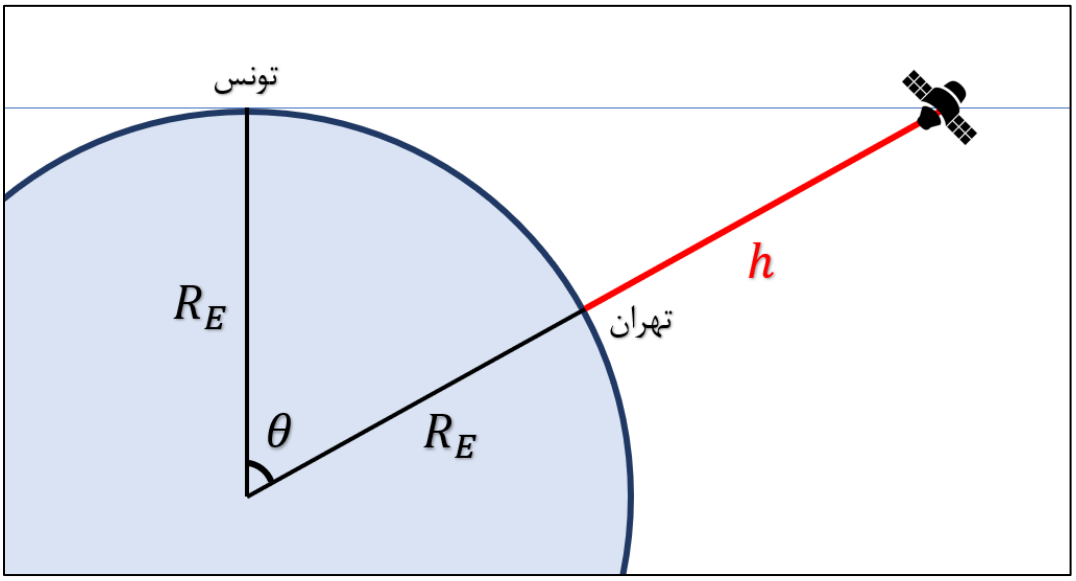
ابتدا زاویه‌ی بین شهر تهران و تونس ($\theta$) را با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها محاسبه می‌کنیم.




$$\cos\theta = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta l$$

$$\theta = 32.92$$

با توجه به مقدار $\theta$ مقدار $h$ را بر حسب شعاع زمین در شکل زیر محاسبه می‌کنیم:



$$\cos\theta = \frac{R_E}{R_E + h} \rightarrow \frac{R_E + h}{R_E} = \frac{1}{\cos\theta} \rightarrow 1 + \frac{h}{R_E} = \frac{1}{\cos\theta} \rightarrow \frac{h}{R_E} = \frac{1}{\cos\theta} - 1$$

$$\frac{h}{R_E} = 0.191$$

عدد فوق بر حسب درصد برابر است با:

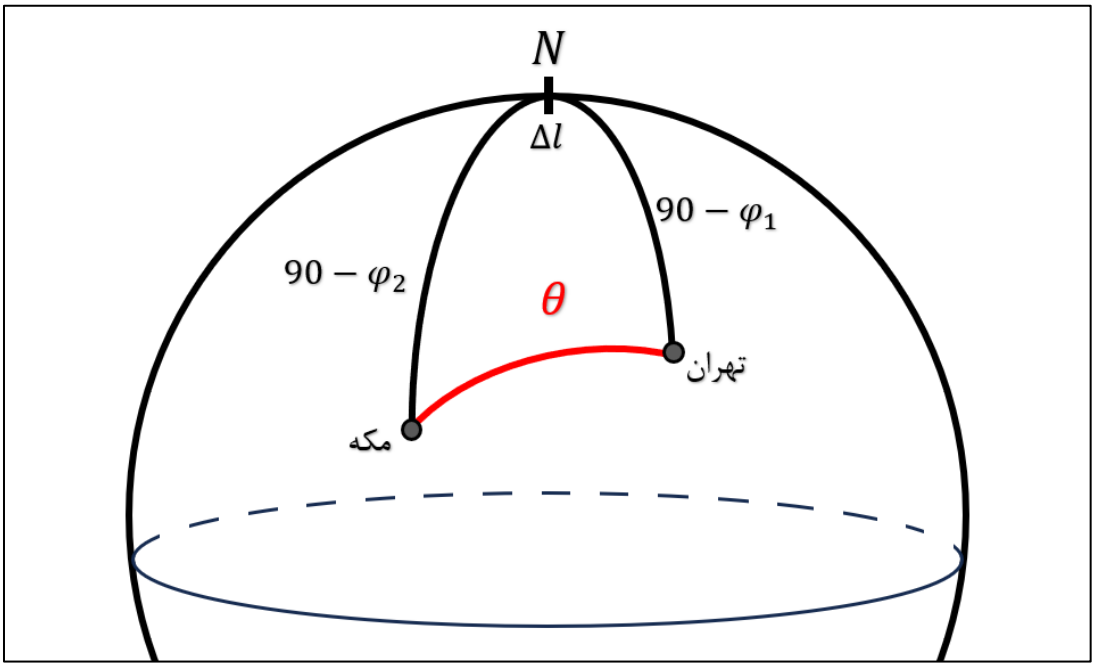
$$0.191 \times 100 = \mathbf{19.1}$$

محاسبات سوال ۷ پاسخ کوتاه:

| | |
|---|---|
| $\sin(36)\sin(36) + \cos(36)\cos(36)\cos(51-10)$ | $= 0.839455336$ |
| $\cos^{-1}\left(\boxed{0.839455336}_{\text{ans}}\right)$ | $= 32.91735094$ |
| $\left(\frac{1}{\cos\boxed{32.91735094}_{\text{ans}}} - 1\right) \cdot 100$ | $= 19.12486075$ |

**سوال ۸ پاسخ کوتاه – (جواب: 32)**

وقتی خورشید در سمت‌الراس مکه قرار داشته باشد، زاویه‌ی بین تهران-مکه برابر زاویه‌ی سمت‌الراسی خورشید از دید ناظران تهران خواهد بود. پس ابتدا زاویه‌ی بین  تهران – مکه را محاسبه می‌کنیم:




با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها داریم:

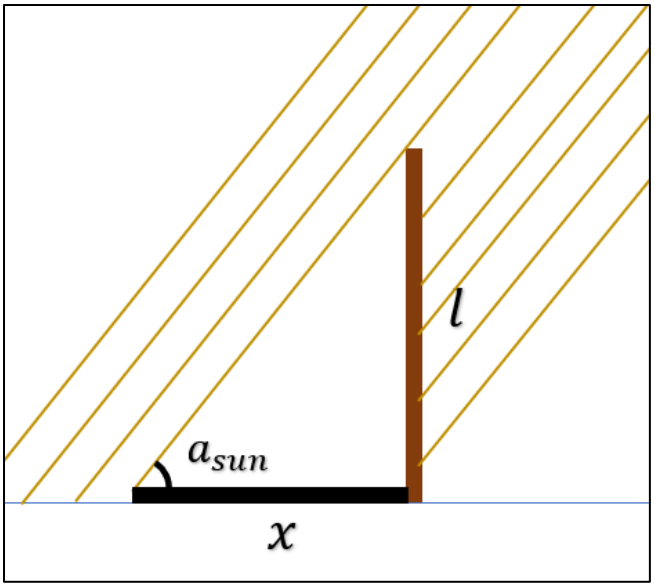
$$\cos\theta = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta l$$

$$\theta = 17.8°$$

در نتیجه زاویه سمت‌الرسی خورشید در تهران و ارتفاع خورشید در تهران را محاسبه می‌کنیم:

$$z_{sun} = 17.8 \rightarrow a = 90 - z \rightarrow a_{sun} = 72.18°$$

حال می‌توانیم با توجه به شکل زیر طول سایه شاخص ۱ متری را محاسبه کنیم:




$$\tan a_{sun} = \frac{l}{x} \rightarrow x = \frac{l}{\tan a_{sun}}$$

$$x = \frac{100}{\tan 72.18} \rightarrow \boldsymbol{x = 32.13\ cm}$$

محاسبات سوال ۸ پاسخ کوتاه:

| | |
|---|---|
| $\sin(36)\sin(21) + \cos(36)\cos(21)\cos(51-40)$ | $= 0.9520491607$ |
| $\cos^{-1}(\boxed{0.9520491607}_{\text{ans}})$ | $= 17.81503156$ |
| $90 - \boxed{17.81503156}_{\text{ans}}$ | $= 72.18496844$ |
| $\frac{100}{\tan \boxed{72.18496844}_{\text{ans}}}$ | $= 32.13542939$ |