

مجاززه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. انام میهنی (ره)

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل | برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و هفتمین دوره المپیاد فیزیک

تاریخ: ۱۴۰۳/۰۱/۲۵ - ساعت: ۸:۰۰ - مدت: ۲۴۰ دقیقه



شماره مندلی

.....

استان: ----

منطقه: ----

پایه تحصیلی: ----

تایید کمیته علمی

شماره پرونده:

کد ملی:

نام پدر: ----

نام مدرسه: ----



حوزه: ----

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

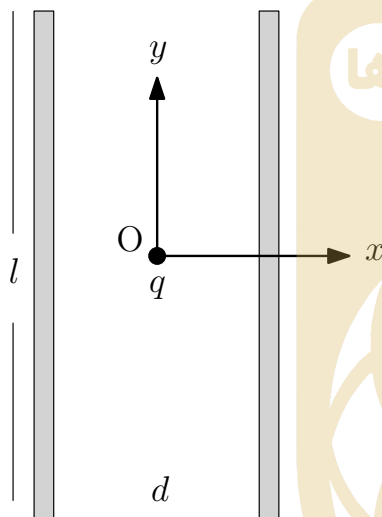
- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود. بنابراین از مراجعه و تکلیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هرگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویسی، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکبویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط محصلین پس از قطع سرمرگد به صورت دانشانی انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت نقض محسوب شده و در هر مرحله ای که بقیشد از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن، تابرده ها در چهار گوشه صفحه و مارکدها خودداری کنید. در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتبه جرمه یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لب تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، نقض محسوب خواهد شد.
- آزمون دوم برای دانش آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه یازدهم انتخاب می شوند.
- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

نکات زیر در برخی از مسائل این آزمون به کار می‌رود.

(۱) وقتی می‌نویسیم $y \ll x$ منظور این است که x خیلی از y کوچکتر است.

(۲) برای $|\epsilon| \ll 1$ و عدد حقیقی a می‌توان نوشت $(1 + \epsilon)^a \approx 1 + a\epsilon$.

(۳) ثابت گرانش را در همهٔ مسائل $g = 10 \text{ m/s}^2$ بگیرید.



باشگاه المپیاد طلایی‌ها

(۱) دو صفحهٔ یک خازن به فاصلهٔ d از یکدیگرند و هر صفحه به شکل مربعی با طول ضلع l است ($l \gg d$). خازن در ابتدا بدون بار الکتریکی است. تا قبل از لحظهٔ

$t = 0$ ذره‌ای با جرم m و بار الکتریکی آزمون q در مبدأ مختصات دستگاه $x - y$

ساکن است. صفحه‌های خازن نیز در این دستگاه مختصات در $x = \pm \frac{d}{2}$ و مرکز

خازن نیز درست در مبدأ مختصات است. پس از لحظهٔ $t = 0$ اختلاف پتانسیل

صفحه‌های خازن (راست منهای چپ) $V(t)$ است و صفحه‌ها از حال سکون با شتاب

a در جهت مثبت محور y شروع به حرکت می‌کنند. در کل سوال از گرانش صرف‌نظر

کنید. پس از لحظهٔ $t = 0$

(آ) معین کنید ذره حداکثر در چه مدت زمانی ممکن است با صفحه‌های خازن برخورد کند؟

(ب) شتاب ذره را به دست آورید.

(پ) اگر $V(t) = V_0 \sin \omega t$ باشد که در آن V_0 و ω کمیت‌های ثابتی هستند، مکان لحظه‌ای ذره به صورت $x(t) = At + B \sin \omega t$

به دست می‌آید. مقادیر A و B را به دست آورید.

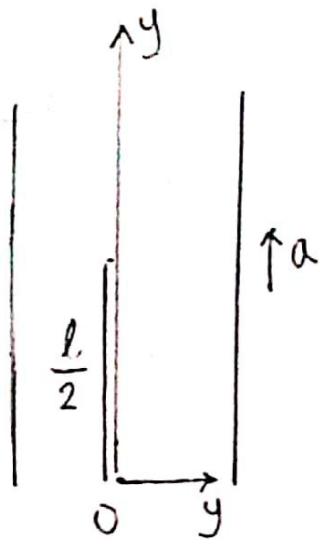
از این به بعد $V(t) = V_0 \sin \omega t$ را به صورت $V(t) = V_0 \sin \omega t$ در نظر بگیرید.

(ت) فرض کنید $\omega \gg \sqrt{\frac{a}{l}}$ است. کمترین مقدار بسامد زاویه‌ای، $\omega_{\min}$ ، چقدر باشد تا ذره به صفحه‌های خازن برخورد نکند؟

(ث) فرض کنید $\omega \ll \sqrt{\frac{a}{l}}$ است. بیشترین مقدار بسامد زاویه‌ای، $\omega_{\max}$ ، چقدر باشد تا ذره به صفحه‌های خازن برخورد نکند؟

توجه: برای $|\epsilon| \ll 1$ می‌توان نوشت $\sin \epsilon \approx \epsilon - \frac{\epsilon^3}{6}$.

مسئله ۱



۱) در مدتی که لوله با دین صفحه‌ها خازن از محور x عبور می‌کند حداکثر زمانی است که امکان برخورد زیره با صفحه‌ها وجود دارد پس

$$\frac{l}{2} = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t_{\max} = \sqrt{\frac{l}{a}}$$

۲) میدان در جهت x است: $m a_x = -q E$

$$m a_x = -q \frac{V(t)}{d} \Rightarrow a_x = -\frac{q V(t)}{m d}$$

باشگاه المپیاد طلایی‌ها

$$V_x(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow V_x(t) = A + B \omega \cos \omega t$$

$$a_x(t) = \frac{dV_x}{dt} \Rightarrow a_x(t) = -B \omega^2 \sin \omega t$$

تبدیل
 $-\frac{q}{m d} V_0 \sin \omega t = -B \omega^2 \sin \omega t$

$$B = \frac{q V_0}{m \omega^2 d}$$

در لحظه $t=0$ ، $V_x(0)=0$ است پس

$$A + B \omega = 0$$

$$A = -\frac{q V_0}{m \omega d}$$

$$\Rightarrow x = \frac{q V_0}{m \omega d} \left(-t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right)$$

۳) بدین‌گونه که زیره خازن برخورد نکند باید $x(t=t_{\max}) > -\frac{d}{2}$

$$\text{از آنجا که } t_{\max} \gg \frac{1}{\omega} \Rightarrow \frac{q V_0}{m \omega d} \left(-t_{\max} + \frac{1}{\omega} \sin \omega t_{\max} \right) > -\frac{d}{2}$$

پس باید $\frac{q V_0}{m \omega d} t_{\max} < \frac{d}{2}$ و $\frac{2 q V_0 t_{\max}}{m d^2} < \omega$

ولتاژ $\omega_{\min} = \frac{2 q V_0}{m d^2} \sqrt{\frac{l}{a}}$

$$\frac{qV_0}{m\omega d} \left(-t_{\max} + \frac{1}{\omega} \sin \omega t_{\max} \right) > -\frac{d}{2} \quad \text{ث. ۶.۲}$$

این بار $\omega t_{\max} \ll 1$ است، در نتیجه

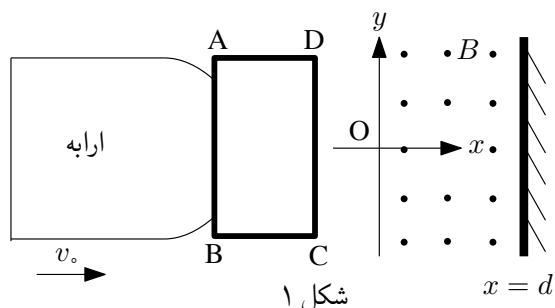
$$\sin \omega t_{\max} \approx \omega t_{\max} - \frac{1}{6} (\omega t_{\max})^3$$

پس بدین

$$\frac{qV_0}{m\omega d} \left(\frac{1}{6} \omega^2 t_{\max}^3 \right) < \frac{d}{2}$$

$$\omega < \frac{3 m d^2}{q V_0 t_{\max}^3}$$

$$\omega_{\max} = \frac{3 m d^2}{q V_0} \left(\frac{\alpha}{l} \right)^{\frac{3}{2}}$$



شکل ۱

(۲) در شکل ۱ تصویر ارابه متحرکی از بالا نشان داده شده است که با سرعت اولیه v_0 به سمت راست در حرکت است. در پیشخوان این ارابه حلقه رسانای مستطیل شکل ABCD به مقاومت الکتریکی R قرار دارد. جرم کل ارابه و حلقه m است. در لحظه $t = 0$ ضلع DC وارد ناحیه ای می شود که در آن میدان مغناطیسی ثابت B عمود بر صفحه شکل و به سمت بیرون وجود دارد. فرض کنید $AB = w$ و $AD = h$ و $x = d$.

در دستگاه مختصات نشان داده شده میدان مغناطیسی در فاصله $0 < x < d$ برقرار است به طوری که $d > h$. در محل $x = d$ دیوار محکمی قرار دارد. شرایط مسئله طوری است که دستگاه قبل از رسیدن به دیوار متوقف می شود. مکان ضلع DC نسبت به مبدأ O، سرعت و شتاب لحظه ای دستگاه در لحظه دلخواه $t > 0$ را به ترتیب x ، v و a بگیرید.

(آ) شتاب ارابه را بر حسب x ، v و کمیت های ثابت داده شده به دست آورید.

(ب) برای به دست آوردن جواب معادله قسمت آ، فرض کنید رابطه سرعت و مکان تابعی به صورت زیر است

$$v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$$

ثابت های α ، β ، γ و λ را بر حسب داده های مسئله به دست آورید.

(یادآوری تعریف سرعت و شتاب: سرعت ارابه از رابطه $v = \frac{dx}{dt}$ به دست می آید که به معنی مشتق مکان x نسبت به زمان t است.

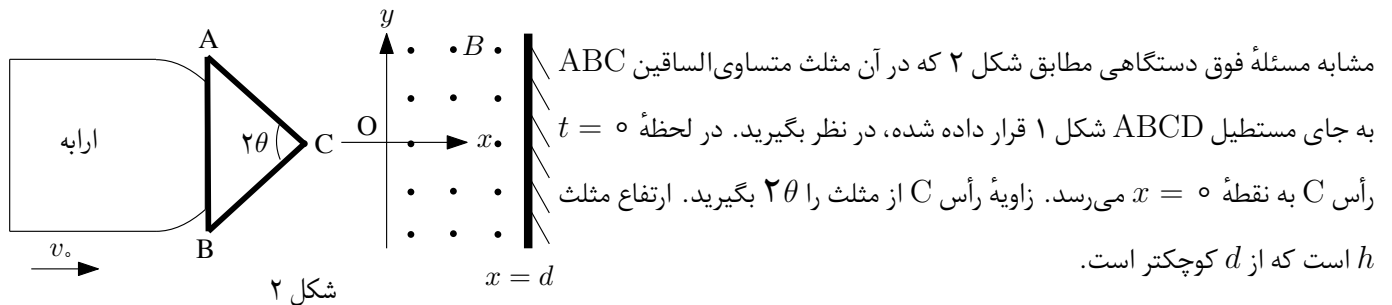
همچنین شتاب از رابطه $a = \frac{dv}{dt}$ به دست می آید که به معنی مشتق سرعت v نسبت به زمان t است.)

(یادآوری قاعده مشتق زنجیره ای: اگر f تابعی از متغیر u باشد و u نیز به نوبه خود تابعی از متغیر s باشد، مشتق f نسبت به

$$s \text{ از رابطه } \frac{df}{ds} = \frac{df}{du} \frac{du}{ds} \text{ به دست می آید.)}$$

(پ) به ازای چه مقداری از x سرعت دستگاه نصف می شود؟

(ت) بیشینه v_0 برای آن که دستگاه با دیوار برخورد نکند چیست؟

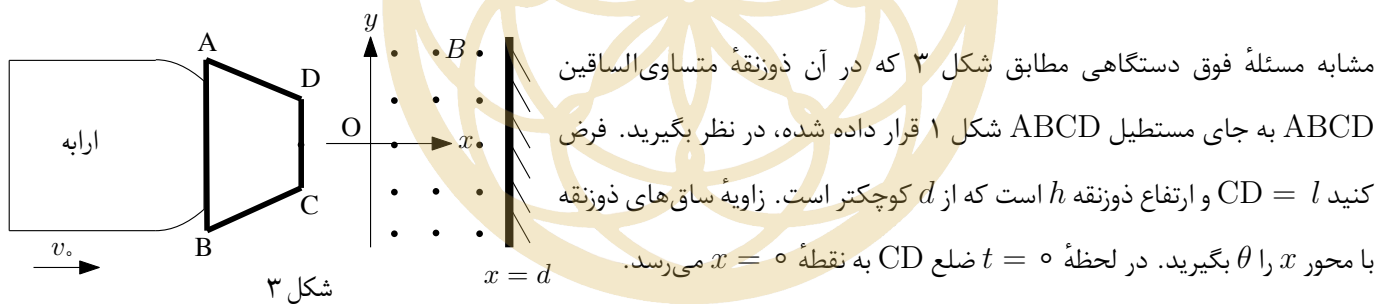


(ث) برای $t > 0$ شتاب ارابه، a ، را بر حسب x مکان نقطه C نسبت به مبدأ O، سرعت لحظه‌ای دستگاه، v ، و کمیت‌های ثابت داده شده به دست آورید.

(ج) برای $t > 0$ تابع $v(x)$ را همان تابع داده شده در بخش ب بگیرید و ضرایب ثابت α ، β ، γ و λ را بر حسب داده‌های مسئله تعیین کنید.

(چ) به ازای چه مقداری از x سرعت دستگاه نصف می‌شود؟

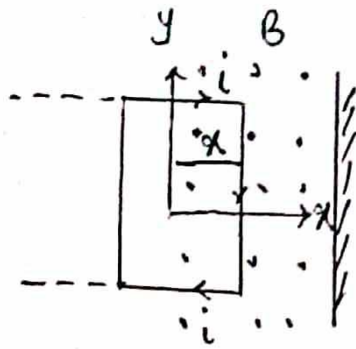
(ح) پیشینه v برای آن که دستگاه با دیوار برخورد نکند چیست؟



(خ) برای $t > 0$ شتاب ارابه، a ، را بر حسب x مکان ضلع DC نسبت به مبدأ O، سرعت لحظه‌ای دستگاه، v ، و کمیت‌های ثابت داده شده به دست آورید.

(د) $v(x)$ را برای $t > 0$ همان تابع داده شده در بخش ب بگیرید و ضرایب ثابت α ، β ، γ و λ را تعیین کنید.

(ذ) پیشینه v برای آن که دستگاه با دیوار برخورد نکند چیست؟



مسئله ۲
(۱۷)

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = xWB$$

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{WB}{R} \frac{dx}{dt}$$

$$F = -iWB$$

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{W^2 B^2}{R} v \Rightarrow \alpha = \frac{dv}{dt} = - \frac{W^2 B^2 v}{mR}$$

پ) اما سرعت لحظه‌ای $v(t)$ و مکان لحظه‌ای ضلع CD یعنی $x(t)$ با استفاده از قاعده

مشتق زنجیره‌ای بهم مربوط اند

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{W^2 B^2}{mR} v$$

شماره بر این

اگر $v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$ باشد

$$\frac{dv}{dx} = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

یعنی باید $\alpha = 0$ ، $\beta = 0$ ، $\gamma = -\frac{W^2 B^2}{mR}$ باشد پس

$$v(x) = -\frac{W^2 B^2}{mR} x + \lambda$$

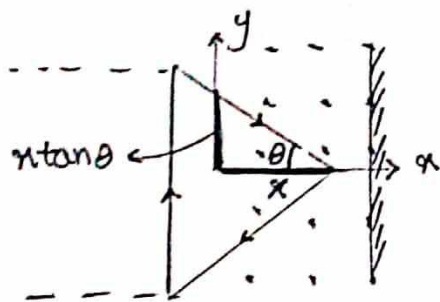
• $\lambda = v_0$

بناچار $x=0$ باید $v(0)=v_0$ باشد پس

$$v(x) = v_0 - \frac{W^2 B^2}{mR} x$$

پ) $x = \frac{mR v_0}{2W^2 B^2}$

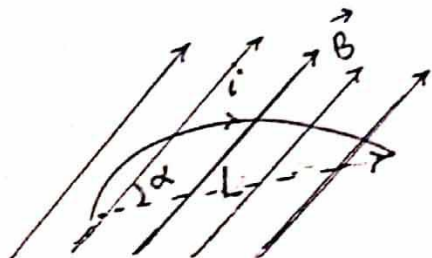
ت) $v(h)=0$ ، $x=h$ باید بناچار $v_0 = \frac{W^2 B^2 h}{mR}$



$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \frac{1}{2} (x) (2x \tan \theta) B$$

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{2x B v \tan \theta}{R}$$



در یک میدان متناهی کثافت نیروی وارد بدست

سیم خنجره مطابق شکل، $F = iLB \sin \alpha$ است.

بنابراین برابر مثلث فوق $F = -i(2x \tan \theta) B$

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{4x^2 \tan^2 \theta B^2 v}{R}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = - \frac{4x^2 \tan^2 \theta B^2 v}{mR}$$

مانند قسمت ۱: $a = v \frac{dv}{dx}$ بنابرین

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{4x^2 \tan^2 \theta B^2 v}{mR}$$

آنرا $v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$ بنویس

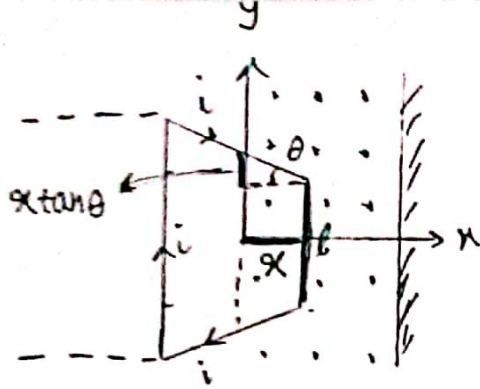
$$\alpha = - \frac{4}{3} \frac{B^2 \tan^2 \theta}{mR}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \lambda = v_0$$

$$v(x) = - \frac{4}{3} \frac{B^2 \tan^2 \theta}{mR} x^3 + v_0$$

$$x = \left(\frac{3 m R v_0}{8 B^2 \tan^2 \theta} \right)^{1/3}$$

بنابرین $v(h) = 0$ $x = h$ بنابرین

$$v_{0 \max} = \frac{4}{3} \frac{B^2 \tan^2 \theta}{mR} h^3$$



$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = [l + (l + 2x \tan \theta)] \frac{x}{2} B$$

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = (l + 2x \tan \theta) \frac{v B}{R}$$

$$F = -i (l + 2x \tan \theta) B$$

$$m \frac{dv}{dt} = - (l + 2x \tan \theta)^2 \frac{v B^2}{R}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = - \frac{(l + 2x \tan \theta)^2 B^2 v}{m R}$$

$$a = v \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{(l + 2x \tan \theta)^2 B^2}{m R}$$

$$\alpha = - \frac{4}{3} \frac{B^2 \tan^2 \theta}{m R}$$

$$\beta = - 2 \frac{B^2 l \tan \theta}{m R}$$

$$\gamma = - \frac{B^2 l^2}{m R}$$

$$\lambda = v_0$$

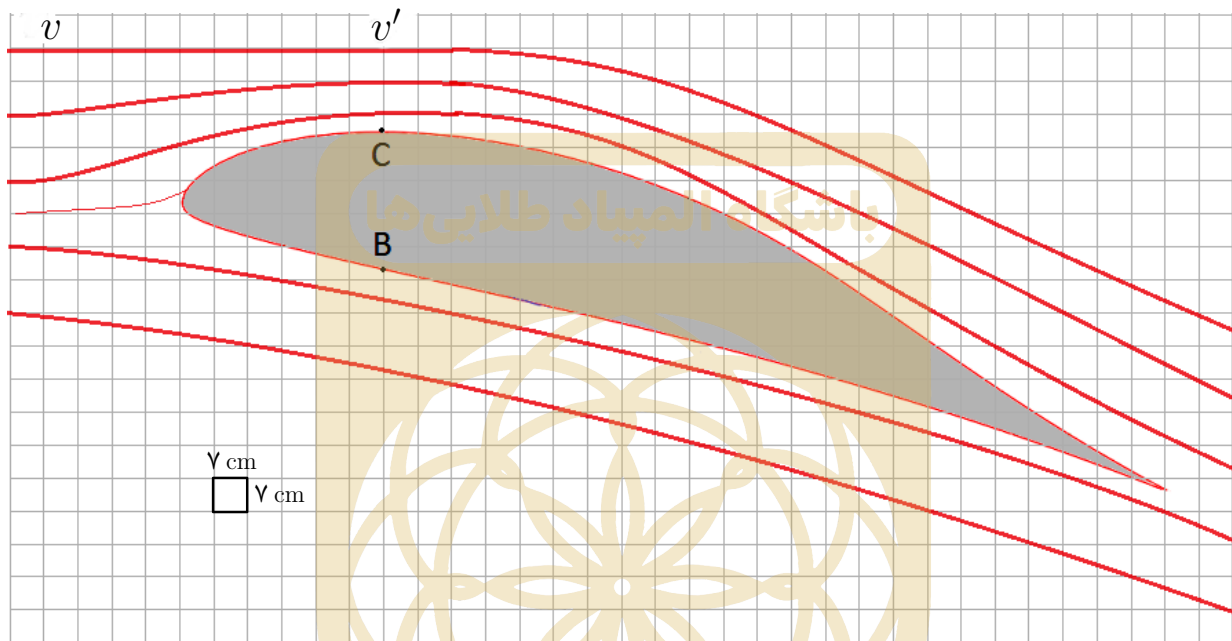
$$v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$$

$$\Rightarrow v(x) = - \frac{4}{3} \frac{B^2 \tan^2 \theta}{m R} x^3 - 2 \frac{B^2 l \tan \theta}{m R} x^2 - \frac{B^2 l^2}{m R} x + v_0$$

$$v(h) = 0 \quad x = h$$

$$v_{0 \max} = \frac{B^2}{m R} \left(\frac{4}{3} \tan^2 \theta h^3 + 2 \tan \theta l h^2 + l^2 h \right)$$

(۳) هواپُرد (Airfoil) اصطلاحی است که به شکل هندسی سطح مقطع بال هواپیما نسبت می‌دهند. شکل ۱ نشان دهنده نوعی هواپُرد است. با گذر هوا از بالا و پایین بال و تغییر جهت و اندازه سرعت هوای عبوری، نیرویی رو به بالا و عقب، به بال هواپیما وارد می‌شود. در این مسئله قصد داریم با مدل‌سازی گفته شده در صورت سوال، نیروی رو به بالای وارد شده به بال هواپیما را به دست آوریم.



شکل ۱: هواپُرد (مقطع بال هواپیما)، در این شکل طول هر ضلع مربع ۱ cm است.

طبق اصل برنولی برای شاره‌ای تراکم‌ناپذیر (با چگالی ثابت) و بدون اصطکاک که به صورت لایه‌ای و پایا حرکت می‌کند، در مسیر حرکت شاره، با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد. ارتباط بین فشار هر نقطه، P ، و تندی شاره در همان نقطه، v ، در مسیر جریان به صورت زیر خواهد بود

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{ثابت}$$

که در آن ρ چگالی شاره، y ارتفاع و g شتاب گرانش زمین است. در تمام مسئله هوای پیرامون هواپُرد را شاره تراکم‌ناپذیر فرض کنید. برای بالابری هواپیما دو نیروی موثر وجود دارد، که یکی نیروی ناشی از اصل برنولی و دیگری نیروی ناشی از تغییر جهت سرعت هوا در ابتدا و انتهای هواپُرد است. از اثرات تلاطمی هوا در انتهای بال‌ها صرف نظر کنید.

طراحی هواپرد چنان است که تندی هوا روی بال بیشتر شده و فشار آن کاهش یابد، در حالی که زیر بال تندی هوا تغییر چندانی ندارد و در این مسئله قابل چشم‌پوشی است. مسئله را از دید فردی که داخل هواپیما نشسته است در نظر بگیرید.

در پاسخ تمام قسمت‌های مسئله ابتدا رابطه پارامتری مربوطه را به دست آورید و سپس عددگذاری آن را انجام دهید.

آ) با توجه به خطوط جریان رسم شده در شکل ۱ اگر تندی هوا نسبت به هواپیما قبل از رسیدن به هواپرد، v ، باشد، تندی هوا بالای نقطه C که در شکل مشخص شده است، v' ، چقدر خواهد بود؟

ب) با توجه به شکل ۱ و مقیاس آن و با فرض آن که چگالی هوا هنگام برخاستن هواپیما $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ باشد، اندازه اثر $\rho g y$ یعنی مقدار تفاوت آن بین بالاترین و پایین‌ترین نقطه هواپرد چقدر است؟

با توجه به کوچکی مقدار به دست آمده در قسمت ب در ادامه مسئله از اثر جمله $\rho g y$ چشم‌پوشی می‌کنیم.

پ) اندازه سرعت هوا نسبت به هواپیما هنگام برخاستن $v = 216 \text{ km/h}$ است. تفاوت فشار هوا روی بال در نقطه C با فشار زیر بال در نقطه B، $\Delta P_{BC} = P_C - P_B$ ، چقدر است؟

در ادامه مسئله فرض کنید اثر نیروی برنولی طوری است که اگر هر یک از دو بال هواپیما را به شکل یک مستطیل افقی به طول $l = 20 \text{ m}$ و عرض $w = 2 \text{ m}$ بگیریم اختلاف فشار متوسط رو و زیر آن معادل $\frac{2}{3} \Delta P_{BC}$ است.

ت) نیروی برنولی بالابر وارد بر این هواپیما در هنگام برخاستن، F_1 ، چقدر است؟

نیروی دیگری هم به دلیل تغییر تکانه هوای عبوری، به بال‌ها وارد می‌شود. این نیرو مانند شکل ۲ معادل تغییر تکانه یک لایه از هوا به ضخامت $h = 2 \text{ m}$ و طول $2l = 40 \text{ m}$ است که قبل و بعد از هواپرد به اندازه $\theta = 14/5^\circ$ تغییر جهت می‌دهد ولی اندازه سرعت هوا تغییر نمی‌کند. $\sin(14/5^\circ) = 0.25$.

ث) آهنگ شارش جرمی هوای عبوری (جرم هوای عبوری در واحد زمان) را برای این لایه برحسب اندازه سرعت، v ، و چگالی هوا، ρ ، به دست آورید.

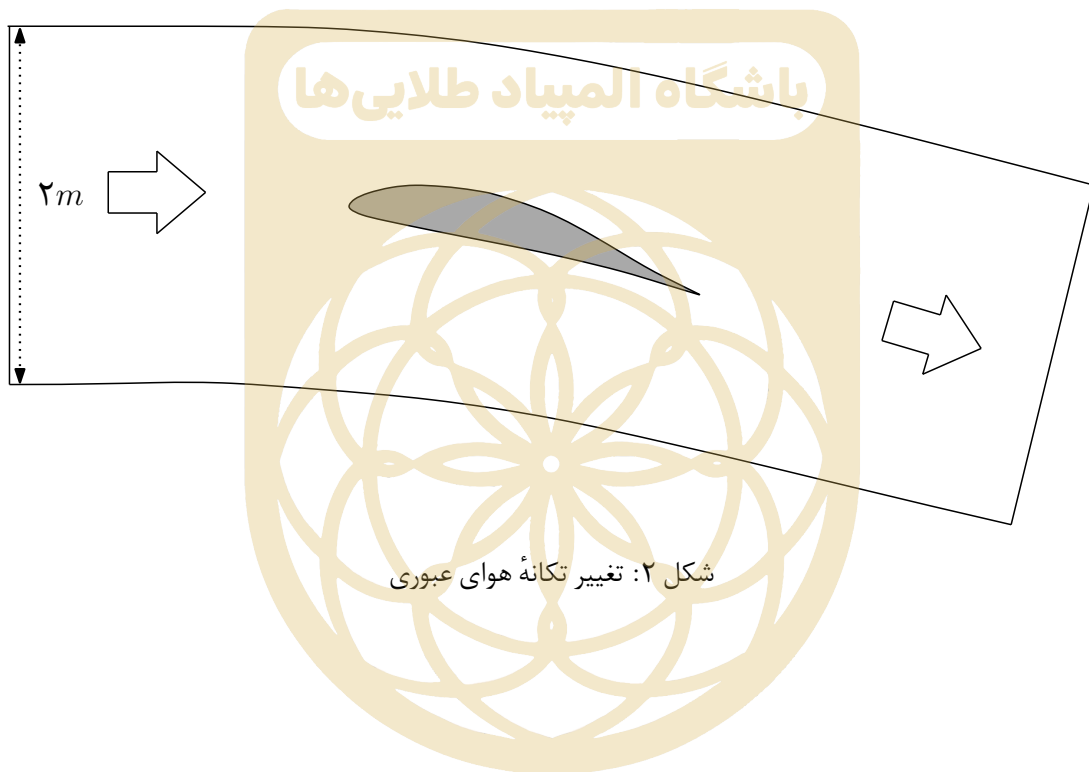
ج) اندازه نیروی ناشی از تغییر تکانه هوا که هنگام برخاستن به هواپیما وارد می‌شود، F_2 ، را به دست آورید.

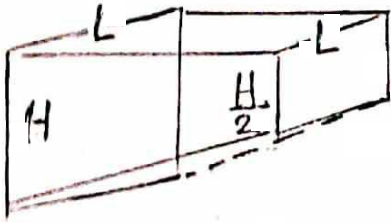
(چ) حداکثر جرم این هواپیما چقدر باشد تا با شرایط فوق بتواند از روی زمین بلند شود؟

(ح) فرض کنید جرم این هواپیما همان جرم به دست آمده در قسمت چ است و حداکثر سرعت این هواپیما در تمامی ارتفاع‌ها برابر

$v_m = 720 \text{ km/h}$ است، همچنین شکل و زاویه بال تغییر نمی‌کند. با افزایش ارتفاع چگالی هوا کاهش می‌یابد و این کاهش باعث

محدودیت ارتفاع می‌شود. کمترین چگالی هوا که این هواپیما بتواند با فرض‌های فوق و در ارتفاع ثابت حرکت کند را محاسبه کنید.





مسئله ۳
 (۱) جثاتی هوا را نسبت فرض کرده ایم و بنابراین
 $A v = A' v' \Rightarrow L H v = L \frac{H}{2} v'$
 $v' = 2v$ بنابراین

$$\Delta P = \rho g y$$

(ب) که y فاصله عمودی بین بالا و پایین لایه هوا. مطابق شکل ۱:
 $y \approx 10 (7 \text{ cm}) = 70 \text{ cm} \Rightarrow \Delta P = (1 \text{ kg/m}^3)(10 \text{ m/s}^2)(0.7 \text{ m})$
 $\Delta P = 7 \text{ Pa}$

(پ) با صرف نظر از جمله $\rho g y$

$$\Delta P_{bc} = \frac{1}{2} \rho v^2 - \frac{1}{2} \rho v'^2$$

$$= -\frac{3}{2} \rho v^2 = -\frac{3}{2} (1 \text{ kg/m}^3) (60 \text{ m/s})^2$$

$$\Delta P_{bc} = -5400 \text{ Pa}$$

(ت)

$$F_1 = \frac{2}{3} |\Delta P_{bc}| (lw)^2$$

$$= \frac{2}{3} (5400 \text{ Pa}) (40 \text{ m}^2) \times 2$$

(ث)

$$F_1 = 288000 \text{ N}$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A v = \rho (2lh) v = (1 \text{ kg/m}^3) (40 \text{ m}) (2 \text{ m}) (60 \text{ m/s})$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = 4800 \text{ kg/s}$$

(ج) تغییر شتاب هوا

$$F_2 = \frac{\Delta m v \sin \theta}{\Delta t} = (4800 \text{ kg/s}) (60 \text{ m/s}) (0.25)$$

$$F_2 = 72000 \text{ N}$$

(د)

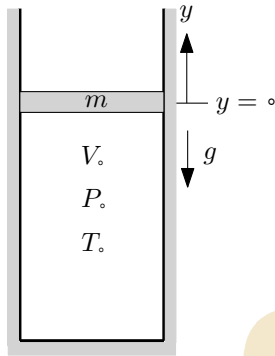
$$F_1 + F_2 = mg \Rightarrow m = 36000 \text{ kg}$$

(ه)

$$\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \rho' v_m^2 \right) (2lw) + \rho' v_m^2 (2lh) \sin \theta = mg$$

$$\rho' = \frac{mg}{v_m^2 (2l) (w + h \sin \theta)} = \frac{360000}{(200)^2 (40) (2 + 2(0.25))}$$

$$\rho' = 0.09 \text{ kg/m}^3$$



شکل ۱

(۴) مطابق شکل ۱ پیستونی به جرم m می‌تواند داخل استوانه‌ ته‌بسته‌ای به سطح مقطع A بدون اصطکاک حرکت کند. درون استوانه گازی آرمانی محبوس است که در حالت تعادل پیستون، حجم آن V_0 ، فشار آن P_0 و دمای آن T_0 است. در این حالت، نقطه وسط پیستون را $y = 0$ بگیرید. دستگاه با محیط خارج تبادل گرما ندارد. لازم به اطلاع است که در طی تحول بی‌دررو گاز آرمانی کمیت PV^γ ثابت می‌ماند که در آن ثابت γ ضریب اتمیسیته گاز نامیده می‌شود. پیستون را اندکی از حالت تعادل منحرف و رها می‌کنیم.

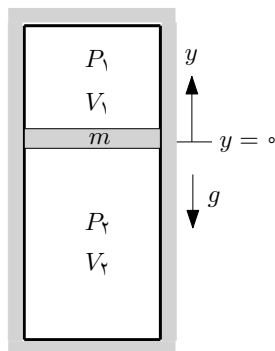
(آ) اگر پیستون به اندازه y از حالت تعادل منحرف شود فشار، P ، حجم، V ، و دمای گاز، T ، را بر حسب y ، V_0 ، P_0 ، T_0 و سایر ثابت‌های داده شده به دست آورید.

(ب) برای y کوچک مقدار تقریبی کمیت $P - P_0$ را تا مرتبه اول (توان یک) y به دست آورید.

حال پیستون را از حالت تعادل خود به اندازه کوچک y منحرف و رها می‌کنیم.

(پ) معادله حرکت پیستون را بنویسید و با مقایسه آن با معادله حرکت جرم و فنر، بسامد زاویه‌ای نوسان را بر حسب ثابت‌های داده شده به دست آورید.

(ت) فرض کنید سرعت پیستون هنگام عبور نقطه وسط آن از نقطه $y = 0$ برابر با v_0 باشد. ضریب فنر معادل این دستگاه را بر حسب y_0 ، v_0 و m به دست آورید.



شکل ۲

اکنون یک استوانه دو سر بسته مطابق شکل ۲ در نظر بگیرید که پیستونی به جرم m می‌تواند بدون اصطکاک داخل آن حرکت کند. در وضعیت تعادل پیستون، $y = 0$ ، دمای گاز دو طرف یکسان و حجم و فشار گاز دو طرف به ترتیب V_1 ، V_2 ، P_1 و P_2 است. گاز دو طرف پیستون آرمانی و دارای ضریب اتمیسیته γ است. گازها با محیط خارج و با یکدیگر تبادل گرما ندارند. سطح مقطع پیستون را A بگیرید.

ث) پیستون را از حالت تعادل خود به اندازه کوچک y منحرف و رها می‌کنیم. نیروی وارد بر پیستون وقتی به اندازه y از حالت تعادل منحرف است را بنویسید و با مقایسه آن با معادله حرکت جرم و فنر، بسامد زاویه‌ای نوسان را بر حسب کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ج) با فرض این که وزن پیستون $2/88 \text{ N}$ ، فشار گاز در محیط اول $P_1 = 72/0 \text{ cmHg}$ ، سطح مقطع پیستون $4/00 \text{ cm}^2$ و رابطه بین تعداد ذرات گاز در دو محیط به صورت $\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{3}$ باشد حساب کنید پیستون در چه ارتفاعی در حالت تعادل اش قرار می‌گیرد؟ از ضخامت پیستون چشم‌پوشی کنید و ارتفاع استوانه را 209 cm در نظر بگیرید. چگالی جیوه $\rho_{\text{Hg}} = 13/6 \text{ g/cm}^3$ است.

باشگاه المپیاد طلایی‌ها



مسئله ۲

$$V = V_0 + Ay$$

$$P_0 V_0^\gamma = P V^\gamma \Rightarrow P = P_0 \left(1 + \frac{Ay}{V_0}\right)^{-\gamma}$$

$$P_0 V_0 = nRT_0 \quad , \quad P V = nRT \Rightarrow T = T_0 \frac{P V}{P_0 V_0}$$

$$T = T_0 \left(1 + \frac{Ay}{V_0}\right)^{1-\gamma}$$

(۲) $\left(1 + \frac{Ay}{V_0}\right)^{-\gamma} \approx 1 - \frac{\gamma Ay}{V_0}$ که برای y ها کوچک درست است. بنابراین

$$P - P_0 \approx - \frac{\gamma A P_0}{V_0} y$$

(۳) فرض کنیم پیستون به اندازه y از حالت تعادل اولیه بالا برآید. پیستون دارد

به پیستون $F_y = PA - mg - P_a A$ است که P_a فشار هوا بیرون است.

در حالت تعادل پیستون $P_0 A - mg - P_a A = 0$ است

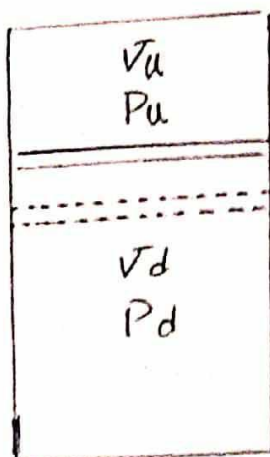
بنابراین $F_y = PA - P_0 A = m a_y$

$$m a_y = - \frac{\gamma A^2 P_0}{V_0} y$$

این معادله شبیه معادله حرکت یک جرم و فنر به نسبت $k = \frac{\gamma A^2 P_0}{V_0}$ است. بنابراین $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma A^2 P_0}{m V_0}}$

(۴) $\frac{1}{2} k y_0^2 + \frac{1}{2} m (0)^2 = \frac{1}{2} k (0)^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow k = \frac{m v_0^2}{y_0^2}$

(۵) فرض کنیم پیستون به اندازه y از حالت تعادل اولیه بالا برآید.



$$V_u = V_1 - Ay$$

$$V_d = V_2 + Ay$$

$$P_u V_u^\gamma = P_1 V_1^\gamma \quad , \quad P_d V_d^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

$$P_u = P_1 \left(1 - \frac{A y}{V_1}\right)^{-\gamma} \approx P_1 \left(1 + \frac{A \gamma y}{V_1}\right)$$

$$P_d = P_2 \left(1 + \frac{A y}{V_2}\right)^{-\gamma} \approx P_2 \left(1 - \frac{A \gamma y}{V_2}\right)$$

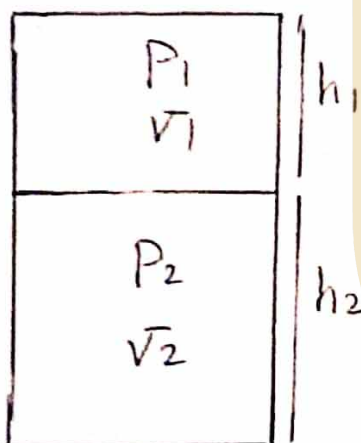
$$F_y = P_d A - P_u A - mg$$

$$m a_y = P_2 A - \frac{P_2 \gamma A^2 y}{V_2} - P_1 A - \frac{P_1 \gamma A^2 y}{V_1} - mg$$

در حالت تعادل $P_2 A - P_1 A - mg = 0$ و لذا

$$m a_y = -\gamma A^2 \left(\frac{P_1}{V_1} + \frac{P_2}{V_2} \right) y$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma A^2}{m} \left(\frac{P_1}{V_1} + \frac{P_2}{V_2} \right)}$$



$$P_1 = (13600 \text{ kg/m}^3) (10 \text{ m/s}^2) (0.72 \text{ m})$$

$$P_1 = 97920 \text{ Pa}$$

در حالت تعادل و بستن

$$P_2 = P_1 + \frac{mg}{A}$$

$$= 97920 \text{ Pa} + \frac{2.88}{4 \times 10^{-4}} \text{ Pa}$$

$$P_2 = 105120 \text{ Pa}$$

$$P_1 V_1 = n_1 R T$$

$$P_2 V_2 = n_2 R T$$

$$V_1 = A h_1$$

$$V_2 = A h_2$$

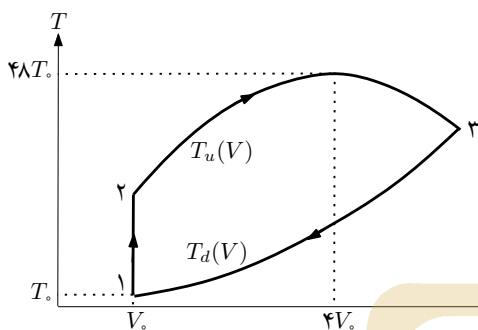
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \frac{P_2}{P_1} = \frac{105120}{2 (97920)} = \frac{73}{136}$$

از تقسیم دو معادله حالت :
از طرفی $h_1 + h_2 = 209 \text{ cm}$ ، بنابرین

$$h_1 = 73 \text{ cm}$$

$$h_2 = 136 \text{ cm}$$



(۵) n مول گاز آرمانی تک اتمی چرخه ایستوار $۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۳ \rightarrow ۱$ شکل مقابل را طی می کند که در آن کمیت های V_0 و T_0 معلوم اند. فرایند $۱ \rightarrow ۲$ هم حجم است و معادله فرایندهای $۲ \rightarrow ۳$ و $۳ \rightarrow ۱$ به ترتیب با روابط $T_u(V) = aV + bV^2$ و $T_d(V) = cV^2$ داده شده اند. بیشینه دمای چرخه $4/8 T_0$ است. یادآوری می شود انرژی داخلی n مول گاز آرمانی تک اتمی با دمای T برابر $\frac{3}{2} nRT$ است که در آن

R ثابت گازها است. پاسخ کلیه بخش های این مسئله را بر حسب V_0 ، T_0 ، R و n

باشگاه المپیاد طلایی ها

بدهید

(آ) با استفاده از نقاط داده شده روی نمودار، ثابت های a ، b و c را به دست آورید.

(ب) مختصات ترمودینامیکی، (V, P, T) ، نقاط ۱، ۲ و ۳ نشان داده شده روی نمودار را به دست آورید.

(پ) کار محیط روی گاز را در هر یک از فرایندهای $۱ \rightarrow ۲$ ، $۲ \rightarrow ۳$ و $۳ \rightarrow ۱$ به دست آورید.

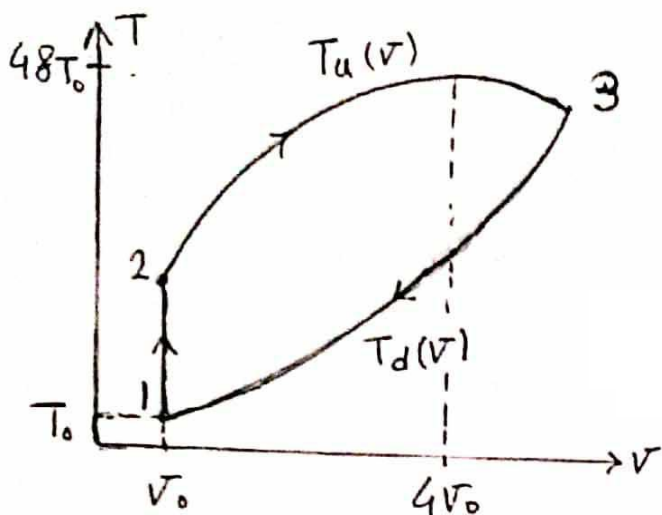
(ت) کار محیط روی گاز در کل چرخه را به دست آورید.

(ث) گرمای داده شده به گاز منهای اندازه گرمای گرفته شده از گاز را در هر یک از فرایندهای $۱ \rightarrow ۲$ ، $۲ \rightarrow ۳$ و $۳ \rightarrow ۱$ به دست آورید.

(ج) در چرخه بالا گرمای (انرژی) داده شده به چرخه (ماشین) را به دست آورید.

(چ) بازده چرخه را محاسبه کنید.

مسئله ۵



$$T_d(v) = cv^2 \quad (1)$$

$$c = \frac{T_0}{v_0^2} \quad , \quad T_0 = cv_0^2$$

نقطه $(4v_0, 48T_0)$ بیابید معنی

$$T_u(v) = av + bv^2 \quad \text{انت ۱ در نتیجه}$$

$$\left. \frac{dT_u}{dv} \right|_{(4v_0, 48T_0)} = 0 \Rightarrow a + 2b(4v_0) = 0 \Rightarrow a = -8bv_0$$

باشگاه المپیاد طلایی‌ها

$$48T_0 = a(4v_0) + b(4v_0)^2 \quad \text{و نیز}$$

$$T_d(v) = T_0 \frac{v^2}{v_0^2} \quad \text{و} \quad T_u(v) = 3T_0 \left(\frac{8v}{v_0} - \frac{v^2}{v_0^2} \right) \quad \text{از ~ معادله بای}$$

$$(v, P, T)$$

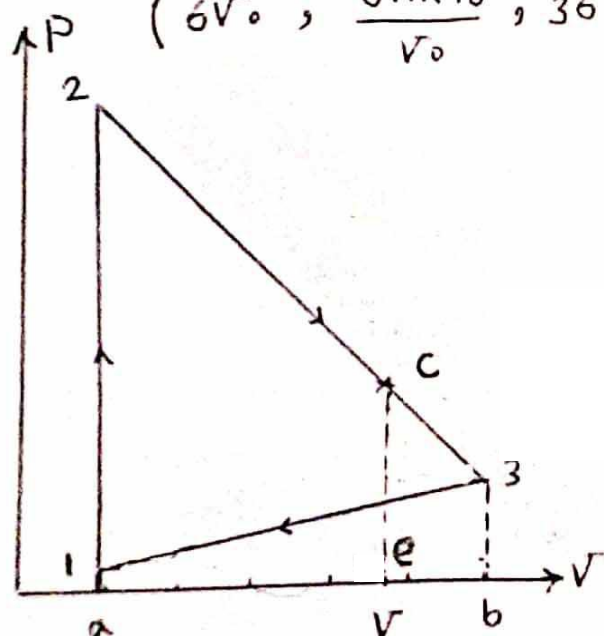
$$PV = nRT \quad (2)$$

$$(v_0, \frac{nRT_0}{v_0}, T_0) \quad \text{نقطه ۱}$$

$$(v_0, \frac{2nRT_0}{v_0}, 2T_0) \quad \text{نقطه ۲}$$

$$(6v_0, \frac{6nRT_0}{v_0}, 36T_0) \quad \text{نقطه ۳}$$

$$\Leftarrow T_u(v) = T_d(v)$$



یعنی نمودار P-v جدید

$$P_u v = nRT_u \Rightarrow P_u = \frac{3nRT_0}{v_0} \left(8 - \frac{v}{v_0} \right)$$

$$P_d v = nRT_d \Rightarrow P_d = \frac{nRT_0}{v_0} \frac{v}{v_0}$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = 0$$

$$W_{2 \rightarrow 3} = -(\text{مساحت ذوزنقه } a_{23}b)$$

$$= - (P_2 + P_3) \left(\frac{V_b - V_a}{2} \right) = - \frac{27nRT_0}{V_0} \left(\frac{5}{2} V_0 \right) = - \frac{135}{2} nRT_0$$

$$W_{3 \rightarrow 1} = (\text{مساحت ذوزنقه } a_{13}b)$$

$$= (P_1 + P_3) \left(\frac{V_b - V_a}{2} \right) = \frac{7nRT_0}{V_0} \left(\frac{5}{2} V_0 \right) = \frac{35}{2} nRT_0$$

$$W_{\text{صاف}} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 1} = -50nRT_0 \quad (ب)$$

ث) قانون اول ترمودینامیک:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = U(2) - U(1) - W_{1 \rightarrow 2}$$

$$= \frac{3}{2} nRT_2 - \frac{3}{2} nRT_1 - W_{1 \rightarrow 2} = 30nRT_0$$

$$Q_{2 \rightarrow 3} = U(3) - U(2) - W_{2 \rightarrow 3}$$

$$= \frac{3}{2} nRT_3 - \frac{3}{2} nRT_2 - W_{2 \rightarrow 3} = 90nRT_0$$

$$Q_{3 \rightarrow 1} = U(1) - U(3) - W_{3 \rightarrow 1}$$

$$= \frac{3}{2} nRT_1 - \frac{3}{2} nRT_3 - W_{3 \rightarrow 1} = -70nRT_0$$

(ج) "مدیر داده به صرفه" $120nRT_0$ نیست، بلکه:

بدان نقطه دگرگونی مانند C به حجم V ، فشار $P_u(V)$ و دما $T_u(V)$

$Q_{2 \rightarrow c}$ را به دست می آوریم:

$$W_{2 \rightarrow c} = -(\text{مساحت ذوزنقه } a_{2ce})$$

$$= - (P_2 + P_c) \left(\frac{V_d - V_a}{2} \right)$$

$$= - \left(\frac{21nRT_0}{V_0} + \frac{3nRT_0}{V_0} \left(8 - \frac{V}{V_0} \right) \right) \frac{1}{2} (V - V_0)$$

$$U(c) - U(2) = \frac{3}{2} nRT_u(V) - \frac{3}{2} nRT_2$$

$$U(c) - U(2) = \frac{3}{2} nR \cdot 3T_0 \left(\frac{8V}{V_0} - \frac{V^2}{V_0^2} \right) - \frac{3}{2} nR (21T_0)$$

در نتیجه

$$Q_{2 \rightarrow c} = U(c) - U(2) - W_{2 \rightarrow c}$$

$$= -6nRT_0 \left(\frac{V^2}{V_0^2} - 10 \frac{V}{V_0} + 9 \right)$$

$$\frac{dQ_{2 \rightarrow c}}{dV} = 0 \Rightarrow V = 5V_0$$

یعنی در فرآیند 2 → 3 دما شش 2 → c گرمای به حذف داده می شود و در بخش 3 → c از آن نرسته می شود

باشگاه المپیاد طلایی ها

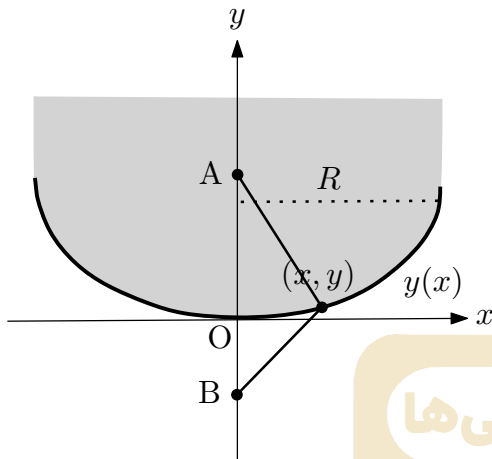
$$Q_{2 \rightarrow c} \big|_{V=5V_0} = 96nRT_0$$

"گرمای داده شده به حذف 96nRT₀ + 30nRT₀ ، یعنی 126nRT₀ است .

$$\text{بازده حذف} = \frac{|W_{\text{کل}}|}{\text{گرمای داده شده به حذف}}$$

(ج)

$$= \frac{50nRT_0}{126nRT_0} = \frac{25}{63}$$



۶) شکل مقابل مقطعی از یک استوانه شفاف به ضریب شکست n و شعاع R را نشان می‌دهد. این مقطع از محور استوانه، محور y می‌گذرد. مقطع ناحیه انتهایی استوانه با تابع $y(x)$ داده شده است. بیرون این جسم هوا با ضریب شکست یک است. سرعت نور در خلاء (و تقریباً هوا) برابر c است و در یک ماده شفاف با ضریب شکست n برابر c/n است. در این سوال هر جا از مرز نام می‌بریم، منظور ما ناحیه انتهایی استوانه شفاف یا همان منحنی $y(x)$ است.

باشگاه المپیاد طلایی‌ها

آ) نقطه A داخل ماده شفاف و نقطه B در فضای پایین و روی محور y قرار دارند و فاصله آن‌ها تا مبدأ مختصات O به ترتیب a و b است. چه مدت زمانی طول می‌کشد تا یک پرتو نور از نقطه A به خط مستقیم به نقطه (x, y) روی مرز رفته و از آنجا به خط مستقیم به نقطه B برود؟

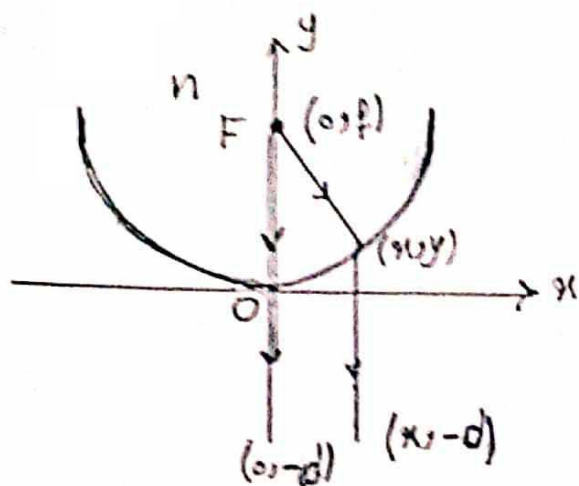
طبق اصل فرما در نورشناخت هندسی، پرتو نوری که از یک نقطه ثابت به نقطه ثابت دیگر می‌رود، مسیری را می‌پیماید که زمان لازم برای پیمودن آن، در مقایسه با مسیرهای نزدیک آن، کمینه است (یا تغییری نمی‌کند). چنانچه برای دو نقطه خاص دسته‌ای از مسیرها همگی دارای کوتاهترین زمان باشند شعاع‌های نور ارسال شده از یکی از این نقاط در نقطه دیگر کانونی می‌شوند (جمع می‌شوند).

ب) نقطه‌ای F را روی محور y و داخل ماده شفاف به فاصله f از مبدأ O در نظر بگیرید. تابع $y(x)$ را چنان تعیین کنید که تمام پرتوهای نور تابیده شده از این نقطه به مرز $y(x)$ بعد از خروج از ماده شفاف، موازی محور y باشند.

پ) فرض کنید خاصیت ذکر شده در قسمت ب برای $0 < x < R$ برقرار است. R را بر حسب n و f به دست آورید.

ت) شکل تقریبی تابع $y(x)$ را برای x های کوچک به دست آورید. به این تقریب، تقریب پیرامحوری می‌گویند.

ث) بر روی محور y نقطه A را داخل ماده شفاف و نقطه B را بیرون ماده شفاف در نظر بگیرید که فاصله آن‌ها تا مبدأ O به ترتیب a و b باشد. چه رابطه‌ای بین a و b برقرار باشد تا پرتوهای نور تابیده شده از نقطه A به نقاط پیرامون محور با شرط $x \ll R$ ، همگی در نقطه B کانونی شوند؟



$$\Delta t = \frac{n}{c} \sqrt{x^2 + (y-f)^2} + \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + (y+d)^2} \quad (1)$$

ب) برای این که بدو یک همکار خدج

از مرز موازی باشند باید همزمان به

صفحه دلخواهی مانند $y = -d$ برسند، یعنی مثلا

$$\Delta t_{(0, f) \rightarrow (x, y) \rightarrow (x, -d)} = \Delta t_{(0, f) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (0, -d)}$$

$$\frac{n}{c} \sqrt{x^2 + (f-y)^2} + \frac{1}{c} (y+d) = \frac{n}{c} f + \frac{1}{c} d$$

$$n^2 (x^2 + (f-y)^2) = (nf-y)^2$$

$$(n^2-1)y^2 - 2nf(n-1)y + n^2x^2 = 0$$

$$y = \frac{n}{n^2-1} \left(f(n-1) \pm \sqrt{(n-1)^2 f^2 - (n^2-1)x^2} \right)$$

علامت - قابل قبول است (چون منفی باید از (0,0) بگذرد پس

$$y = \frac{nf}{n+1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{n+1}{n-1} \frac{x^2}{f^2}} \right)$$

ب) باید زیر رادیکال همواره بزرگتر یا مساوی صفر باشد، یعنی

$$1 - \frac{n+1}{n-1} \frac{x^2}{f^2} \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{n-1}{n+1} f^2$$

$$x \leq \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} f \Rightarrow x_{\max} = R \equiv \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} f$$

$$\sqrt{1 - \frac{n+1}{n-1} \frac{x^2}{f^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{n+1}{n-1} \frac{x^2}{f^2}$$

(ج) برابر $\frac{x}{f}$

در نتیجه

$$y \approx \frac{nf}{n+1} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{n+1}{n-1} \frac{x^2}{f^2} \right)$$

$$y \approx \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} \frac{x^2}{f}$$

(ث) می خوانیم

$$\Delta t_{(0,0,a) \rightarrow (x,y) \rightarrow (0,0,b)} = \Delta t_{(0,0,a) \rightarrow (0,0) \rightarrow (0,0,b)}$$

$$\frac{n}{c} \sqrt{x^2 + (a-y)^2} + \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + (y+b)^2} = \frac{n}{c} a + \frac{1}{c} b$$

$$n \sqrt{x^2 + y^2 + a^2 - 2ay} + \sqrt{x^2 + y^2 + b^2 + 2by} = na + b$$

$$\frac{x}{f} \ll 1 \quad \sim y \approx \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} \frac{x^2}{f}$$

$$n \sqrt{x^2 + a^2 - \frac{n}{n-1} \frac{x^2 a}{f} + \frac{1}{4} \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 \frac{x^4}{f^2}} + \sqrt{x^2 + b^2 + \frac{n}{n-1} \frac{x^2 b}{f} + \frac{1}{4} \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 \frac{x^4}{f^2}} = na + b$$

از جمله $\frac{x^4}{f^4}$ در مقابل $\frac{x^2}{f^2}$ صرف نظر می کنیم و در نتیجه

$$na \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{n}{n-1} \frac{x^2}{af}} + b \sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2} + \frac{n}{n-1} \frac{x^2}{bf}} \approx na + b$$

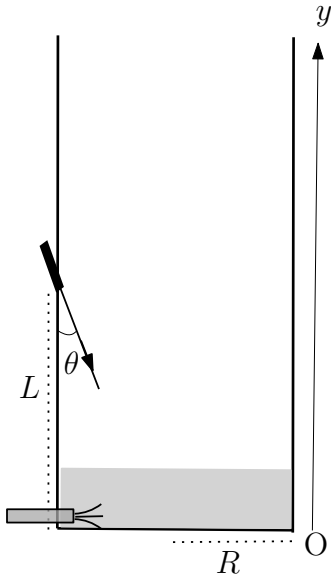
$$\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{اگر } |\epsilon| \ll 1 \quad \text{بنابراین}$$

$$na \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{n}{n-1} \frac{x^2}{af} \right) \right) + b \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{n}{n-1} \frac{x^2}{bf} \right) \right) \approx na + b$$

↓

پس از ساده کردن:

$$\frac{n}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n}{f}$$



(۷) یک مخزن استوانه‌ای خالی به شعاع قاعده R مطابق شکل در نظر بگیرید. کف استوانه آینه و دیواره‌های آن کدر است. آب از لحظه $t = 0$ به آرامی از طریق لوله‌ای واقع در کف مخزن وارد آن می‌شود. سطح آب همواره افقی است و با سرعت ثابت v_0 در راستای قائم بالا می‌آید. ضریب شکست آب n و ضریب شکست هوا یک است. در ارتفاع L روی سطح جانبی مخزن یک چشمه نور قرار داده شده که می‌تواند باریکه‌ای از نور را تحت زاویه θ با امتداد قائم به سمت کف مخزن گسیل کند به طوری که $\tan \theta < R/L$ و $\sin \theta < 1/n$. پرتو نور گسیل شده وارد آب می‌شود و پس از انعکاس از آینه واقع در کف مخزن از آب خارج می‌شود. سپس به نقطه‌ای واقع بر سطح جانبی مخزن می‌تابد و نقطه‌ای روشن ایجاد می‌کند. کلیه پرتوها را در صفحه شکل در نظر بگیرید. در این مسئله بازتاب داخلی کلی نداریم و از بازتاب نور از سطح آب صرف نظر می‌کنیم.

(آ) در بازه زمانی $0 < t < L/v_0$ مکان لحظه‌ای نقطه روشن روی سطح جانبی استوانه، $y(t)$ ، را بر حسب زمان t و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

(ب) در بازه زمانی $0 < t < L/v_0$ سرعت لحظه‌ای نقطه روشن روی سطح جانبی استوانه، $v(t)$ ، را بر حسب زمان t و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

(پ) در بازه زمانی $t > L/v_0$ مکان لحظه‌ای نقطه روشن روی سطح جانبی استوانه، $y(t)$ ، را بر حسب زمان t و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

(ت) در بازه زمانی $t > L/v_0$ سرعت لحظه‌ای نقطه روشن روی سطح جانبی استوانه، $v(t)$ ، را بر حسب زمان t و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

(ث) به ازای مقادیر عددی $L = R = 24/0 \text{ cm}$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $n = 1/3$ ، و $v_0 = 120 \text{ cm/s}$ در بازه زمانی $0 < t < 600 \text{ s}$ کمیت‌های $y(t)$ و $v(t)$ را بر حسب t به دست آورید. بیشینه کمیت‌های $y(t)$ و $v(t)$ یعنی $y_{\max}$ و $v_{\max}$ چقدر است؟
 $\sqrt{3} \approx 1/73$

(ج) نمودار مکان، $(y/y_{\max})$ ، و سرعت لحظه‌ای، $(v/v_{\max})$ ، نقطه روشن روی سطح جانبی استوانه بر حسب زمان را در کاغذ مدرج موجود در پاسخ‌نامه رسم کنید.

در بازه زمانی $0 < t < L/v_0$

(۱) در لحظه t است $d = v_0 t$

مطابق شکل: $OP = y$ و $y = d + x \cot \theta$

$$x_1 + 2x_2 + x = 2R$$

$$x_1 = (L - d) \tan \theta$$

$$x_2 = d \tan \theta'$$

و طبق قانون انشعاب $\sin \theta = n \sin \theta'$

$$1 + \cot^2 \theta' = \frac{1}{\sin^2 \theta'} \Rightarrow \tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}$$

$$y = d + \left(2R - (L - d) \tan \theta - 2d \frac{\sin \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right) \cot \theta$$

$$y = 2d - L + 2R \cot \theta - 2d \frac{\cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}$$

$$y(t) = 2R \cot \theta - L + 2v_0 t \left(1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)$$

$$v(t) = 2v_0 \left(1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)$$

(۲)

$d = v_0 t$, $\frac{L}{v_0} < t < t_0$

(۳) در لحظه t که

$$y = d + x \cot \theta'$$

است و

$$x_1 + x_2 + x = 2R$$

$$x_1 = L \tan \theta$$

$$x_2 = d \tan \theta$$

$$n \sin \theta = \sin \theta'$$

و طبق قانون انشعاب

ت زمانی است که $x = 0$ می شود.

$$1 + \cot^2 \theta' = \frac{1}{\sin^2 \theta'} \Rightarrow \cot \theta' = \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}}{n \sin \theta}$$

$$y = d + (2R - L \tan \theta - d \tan \theta) \cot \theta'$$

$$y = (2R - L \tan \theta) \cot \theta' + d (1 - \tan \theta \cot \theta')$$

$$y(t) = (2R - L \tan \theta) \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}}{n \sin \theta} + v_0 t \left(1 - \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}}{n \cos \theta} \right)$$

این جواب برای $\frac{L}{v_0} < t < t_0$ درست است $x(t) \Big|_{t=t_0} = 0$

$$2R - L \tan \theta - v_0 t_0 \tan \theta = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{v_0} (2R \cot \theta - L)$$

برای $t > t_0$ نقطه P در دیواره استوانه جایی نمی‌تورد و

$$y(t) = (2R - L \tan \theta) \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}}{n \sin \theta} + v_0 t_0 \left(1 - \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}}{n \cos \theta} \right)$$

$$y(t) = 2R \cot \theta - L$$

(=) برای $\frac{L}{v_0} < t < t_0$

$$v(t) = v_0 \left(1 - \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}}{n \cos \theta} \right)$$

و برای $t > t_0$: $v(t) = 0$

(ث) برای $0 < t < 200s$

$$y(t) = (2(1.73) - 1) 24.0 + 2(0.120)t \left(1 - \frac{1.73}{2(1.20)} \right) \text{ cm}$$

$$y(t) = (59.0 + 0.067 t) \text{ cm}$$

$$\frac{cm}{s} \quad v(t) = 2(0.120) \left(1 - \frac{1.73}{2(1.20)} \right) = 0.067 \text{ m/s}$$

$$t_0 = \frac{1}{0.12} (2(1.73) - 1) \cdot 24.0 = 492.5$$

$$200.5 < t < 492.5 \quad \text{بدار}$$

$$y(t) = \left(2 - \frac{1.73}{3}\right) 24.0 \frac{\sqrt{1-0.4225}}{(1.3)(0.5)} + 0.120 t \left(1 - \frac{2\sqrt{1-0.4225}}{(1.3)(1.73)}\right)$$

$$\sqrt{1-0.4225} \approx 0.789 \quad \text{بنابرین} \quad \sqrt{1-\epsilon} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

$$161 < 1$$

$$y(t) \approx 41.5 + 0.036t$$

$\downarrow$ بین 38 تا 42 قبول است
 $\downarrow$ بین 0.033 تا 0.039 قبول است

$$492.5 < t < 600.5 \quad \text{بدار}$$

$$y(t) = (2(1.73) - 1) \cdot 24.0 = 59.0 \text{ cm}$$

$$v(t) = 0$$

(ج)

$$y_{\max} = 59.0 + 0.067(200) = 72.4 \text{ cm} \quad , \quad v_{\max} = 0.067 \text{ cm/s}$$

بنابرین :

$$0.8 < \frac{y}{y_{\max}} < 1 \quad , \quad 59.0 \text{ cm} < y < 72.4 \text{ cm} : 0 < t < 200.5 \quad \text{بدار}$$

$$0.7 < \frac{y}{y_{\max}} < 0.8 \quad , \quad 48.7 \text{ cm} < y < 59.0 \text{ cm} : 200.5 < t < 492.5 \quad \text{بدار}$$

$\downarrow$ بین 49 تا 50 قبول است
 $\downarrow$ بین 54 تا 61 قبول است

$$\frac{v}{v_{\max}} = 1$$

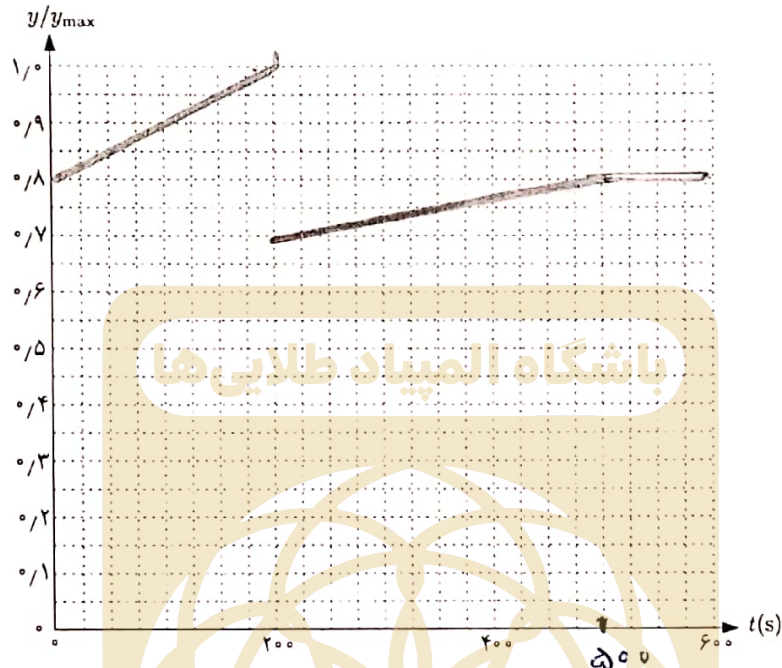
$$0 < t < 200 \quad \text{بدار}$$

بین 0.75 تا 0.85 قبول است
 بین 0.60 تا 0.70 قبول است

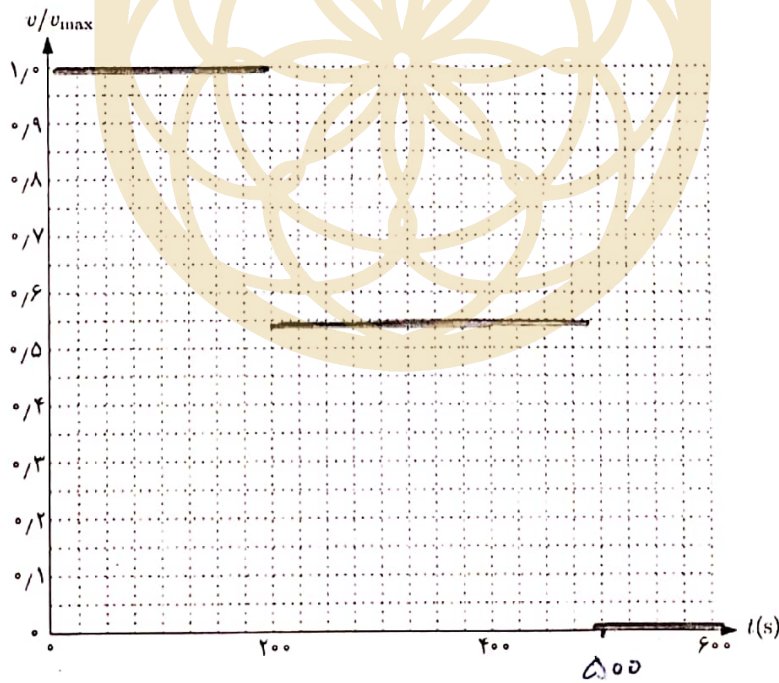
$$\frac{v}{v_{\max}} \approx 0.54$$

$$200.5 < t < 492.5 \quad \text{بدار}$$

$\downarrow$ بین 0.5 تا 0.6 قبول است



$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < t < 200s \\ 0.8 < \frac{y}{y_{max}} < 1 \\ 200s < t < 492s \\ 0.7 < \frac{y}{y_{max}} < 0.8 \\ t > 492s \\ \frac{y}{y_{max}} = 0.8 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < t < 200s \\ \frac{v}{v_{max}} = 1 \\ 200s < t < 492s \\ \frac{v}{v_{max}} \approx 0.54 \\ t > 492s \\ \frac{v}{v_{max}} = 0 \end{array} \right.$$