باسمه تعالی

باشگاه طلایی های ایران

علم همراه تهذیبِ نفس است که انسان را به مقام انسانیت می رساند .هم
در علم کوشا باشید وهم در عمل و هم در تهذیب اخلاق .

"امام خمینی(ره)"

باشگاه طلایی های ایران
IRAN'S GOLD WINNERS CLUB

دفترچهٔ **پاسخنامه** آزمون آزمایشی مرحله اول

المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۶

پاسخنامه تشریحی

---

۱. گزینهٔ ۲ صحیح است.

چینش افراد ۳ حالت کلی دارد:

حالت ۱: (۱۱۱۱۱)

در این حالت باید در هر اتاق دقیقاً یک نفر قرار بگیرد که در این حالت !۵ روش برای قرار گرفتن این افراد در اتاق‌ها وجود دارد که برابر است با: ۱۲۰

حالت ۲: (۲۱۱۱۰)

در این حالت ابتدا یک اتاق دو نفره را به $\binom{۵}{۱}$ طریق و سپس سه اتاق یک نفره را به $\binom{۴}{۳}$ طریق انتخاب می‌کنیم. سپس دو نفری که در اتاق دو نفره قرار می‌گیرند را به $\binom{۵}{۲}$ طریق و ۳ نفر دیگر را به !۳ طریق در این اتاق‌ها قرار می‌دهیم که در کل برابر است با: $\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۲}۳!=۱۲۰۰$

حالت ۳: (۲۲۱۰۰)

در این حالت ابتدا دو اتاق دو نفره را به $\binom{۵}{۲}$ طریق و سپس یک اتاق یک نفره را به $\binom{۳}{۱}$ طریق انتخاب می‌کنیم. سپس شخصی که در اتاق یک نفره قرار می‌گیرد را به $\binom{۵}{۱}$ طریق انتخاب می کنیم و از ۴ نفر باقی مانده به $\binom{۴}{۲}$ طریق آن‌ها را در دو اتاق توزیع می‌کنیم که در کل برابر است با:

$$\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}=۹۰۰$$

و در کل پاسخ مسئله برابر است با:

$$۱۲۰+۱۲۰۰+۹۰۰=۲۲۲۰$$

۲. گزینهٔ ۱ صحیح است.

بر روی حذف شدن یال میانی حالت‌بندی می‌کنیم.

اگر یال میانی حذف شود یک دور از گراف باقی می‌ماند. که می‌توان حداکثر یک یال از آن را حذف کرد که این کار ۷ حالت دارد. (۶ حالت برای حذف یک یال و ۱ حالت برای حذف نکردن)

اگر یال میانی حذف نشود. از هر کدام از دو مربع حداکثر می‌توان ۱ یال حذف کرد که این کار برای هر مربع ۴ حالت دارد، بنابراین $۴\times۴=۱۶$ برای انجام این کار ممکن است.

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

$$۲۳=۷+۱۶$$

۳. گزینهٔ ۲ صحیح است.

فرض کنید آن ۴ وجه کناری آبی باشند. اکنون روی تعداد وجه‌های آبی حالت‌بندی می‌کنیم:

۴ وجه آبی: در این حالت باید دو وجه قرمز رو به روی هم باشند و چون ۳ جفت وجه روبه‌روی هم داریم این کار را به ۳ طریق می‌توان انجام داد.

۵ وجه آبی: در این حالت تنها باید یک وجه قرمز باشد و برای انتخاب آن وجه ۶ حالت داریم.

۶ وجه آبی: برای این کار نیز تنها یک حالت داریم.

پس اگر این ۴ وجه کناری بخواهند آبی باشند $۳+۶+۱=۱۰$ حالت و به همین ترتیب اگر این ۴ وجه قرمز باشند ۱۰ حالت داریم پس در کل ۲۰ روش رنگ‌آمیزی مطلوب داریم.

هر وجه می‌تواند آبی یا قرمز باشد پس تعداد کل روش‌های رنگ‌آمیزی برابر ۶۴ است. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

$$\frac{۲۰}{۶۴}=\frac{۵}{۱۶}$$

۴. گزینهٔ ۲ صحیح است.

چون جمع اعداد داده شده برابر با ۹۰ می‌باشد پس یکی از حمام‌ها باید بیشتر یا مساوی ۴۵ دقیقه مشغول باشد. ولی همه این ۶ نفر نمی‌توانند در ۴۵ دقیقه دوش بگیرند. یعنی نمی‌توان این ۶ عدد را به دو دسته با مجموع ۴۵ افراز کرد.

چون باید مجموع هر دو دسته فرد باشد، ۱۷ در یک دسته و ۲۱ در دسته‌ای دیگر قرار می‌گیرد. سپس ۲۲ در هر دسته‌ای که قرار بگیرد جمع آن دسته دیگر نمی‌تواند برابر ۴۵ باشد.

حال اگر نفرات ۱۰ و ۱۲ و ۲۲ دقیقه‌ای در یک حمام و نفرات ۱۷ و ۱۸ و۲۱ دقیقه‌ای وارد حمام دیگر شوند در کل ۴۶ دقیقه طول می‌کشد تا همه این افراد دوش بگیرند.

۵. گزینهٔ ۴ صحیح است.

خانه سبز رنگ یا در ۳ خانه کناری قرار دارد و یا در ۳ خانه میانی.

اگر در خانه کناری باشد شکل را دوران می‌دهیم تا خانه سبز در خانه پایینی ردیف پایین قرار گیرد در این صورت برای رنگ‌آمیزی بقیه خانه‌ها ۶ حالت زیر ممکن است.

اگر در خانه میانی باشد شکل را دوران می‌دهیم تا خانه سبز در خانه میانی در ردیف پایین قرار گیرد در این صورت به‌طور مشابه ۶ حالت ممکن است.

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

b b b r r g	r b b r b g	b r b r b g	b b r r b g	r r b b b g	r b b b g

$$۱۲=۶+۶$$

۶. گزینهٔ ۵ صحیح است.

n عددی دو رقمی است پس: $۱ \le s(n) \le ۱۸$

مقدار $s(n)$ تنها باید ۳ و ۱۲ باشد تا $s(s(n))$ برابر ۳ شود.

حالت ۱: $(s(n)=۳)$: در این حالت n تنها مقادیر ۱۲و ۲۱و ۳۰ را می‌تواند داشته باشد.

حالت ۲: $(s(n)=۱۲)$: در این حالت n تنها مقادیر ۳۹ ، ۴۸، ۵۷، ۶۶، ۷۵، ۸۴، ۹۳ را می‌تواند داشته باشد.

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

$$۱۰=۷+۳$$

۷. گزینهٔ ۳ صحیح است.

برای همه ۱۲۸ حالت رنگ‌آمیزی به‌جز دو حالتی که تمام نقطه‌ها سفید و تمام نقاط سیاه هستند. هر حالت دقیقاً به ۶ حالت دیگر با دوران تبدیل می‌شود. بنابراین تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی برابر است با:

$$\frac{۲^۷-۲}{۷}+۲=۲۰$$

۸. گزینهٔ ۱ صحیح است.

اگر ارقام این اعداد اکیداً نزولی باشند کافی است مجموعه ارقام را مشخص کنیم تا آن عدد به‌صورت یکتا مشخص شود. ارقام این اعداد زیر مجموعه‌های ناتهی $\{۰,۱,۲,...,۹\}$ هستند که تعداد آن‌ها برابر است با: $۲^{۱۰}-۱=۱۰۲۳$ ولی می‌دانیم عدد صفر طبیعی نیست پس ۱۰۲۲ حالت دارد.

به همین ترتیب اگر ارقام اکیداً صعودی باشند مجموعه ارقام زیر مجموعه‌های ناتهی $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ خواهند بود که تعداد آن‌ها برابر است با: $۲^۹-۱=۵۱۱$

اکنون می‌دانیم تنها اعداد یک رقمی را در هر دو حالت در نظر گرفتیم پس پاسخ مسئله برابر است با:

$$۱۰۲۲+۵۱۱-۹=۱۵۲۴$$

۹. گزینهٔ ۲ صحیح است.

اگر مجموع این ۴ عدد برابر s باشد داریم:

$$-۱+۳+۵+۸=۳\times s \rightarrow s=۵$$

پس $\{۵-a_۴, ۵-a_۳, ۵-a_۲, ۵-a_۱\}=\{-۱,۳,۵,۸\}$ بنابراین داریم:

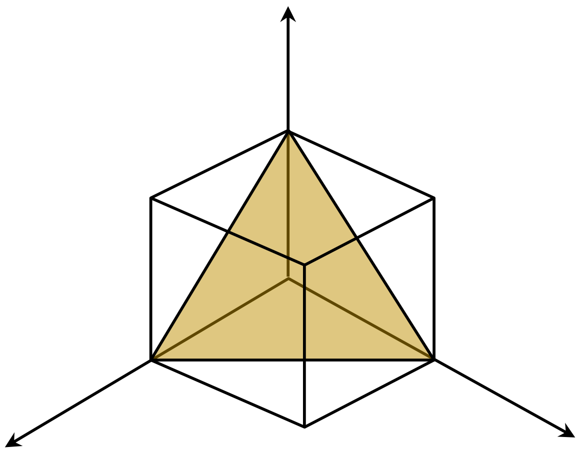
$$a_۴=۶, a_۳=۲, a_۲=۰, a_۱=-۳$$

بنابراین :

$$a_۱-a_۲+a_۳-a_۴=(-۳)-۰+۲-۶=-۷$$

۱۰. گزینهٔ ۳ صحیح است.

هر مقدار $(x_۱, x_۲, x_۳)$ را به‌صورت یک نقطه در فضای سه‌بعدی در نظر بگیرید. مطابق شکل زیر کل حالت‌های ممکن همه نقاط داخل این مکعب است و حالت‌های مطلوب هرمی به شکل زیر است. بنابراین پاسخ مسئله نسبت مساحت این هرم به مساحت این مکعب است.



$$\frac{\frac{۱}{۳}\times\left(\frac{۱}{۲}\times۱\right)}{۱\times۱\times۱}=\frac{۱}{۶}$$

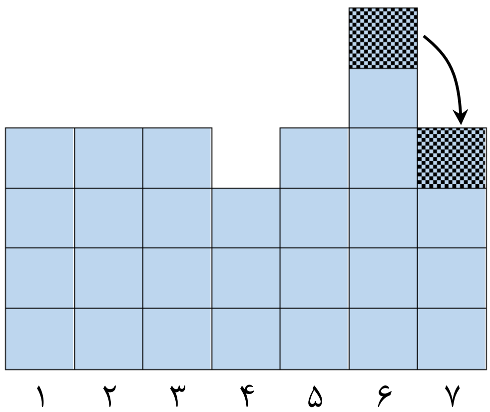
۱۱. گزینهٔ ۳ صحیح است.

هر عملیات تعداد خانه‌های روی دو ستون را تغییر می‌دهد. هم‌چنین مقدار تمامی ستون‌ها باید برابر ۴ شود. بنابراین ستون ۱ حداقل ۱ بار، ستون ۲ حداقل ۲ بار، ستون ۳ حداقل ۱ بار، ستون ۴ حداقل ۱ بار، ستون ۵ حداقل ۲ بار، ستون ۶ حداقل ۱ بار، ستون ۷ حداقل ۱ بار تغییر کند. بنابراین اگر تعداد عملیات های لازم برابر k باشد داریم:

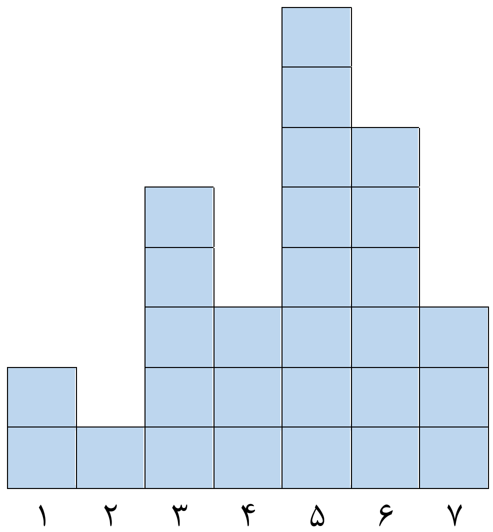
$$۱+۲+۱+۱+۲+۱+۱\geq ۲k \rightarrow k\geq ۴/۵$$

پس به حداقل ۵ عملیات نیاز داریم.

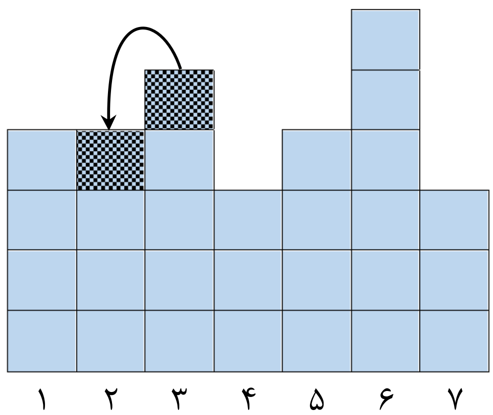
اکنون ۵ عملیات را مطابق شکل زیر انجام می‌دهیم.



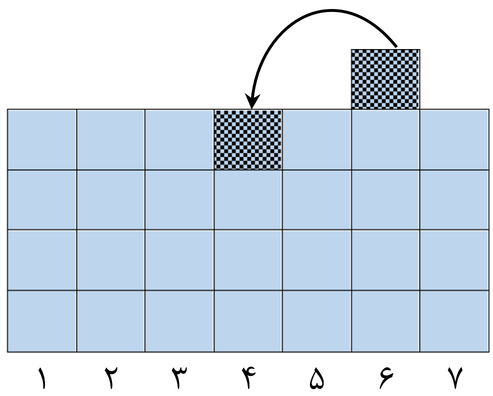
(۵)



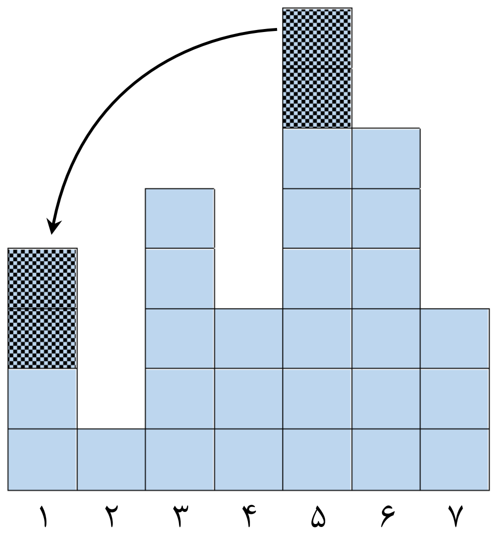
(۱)



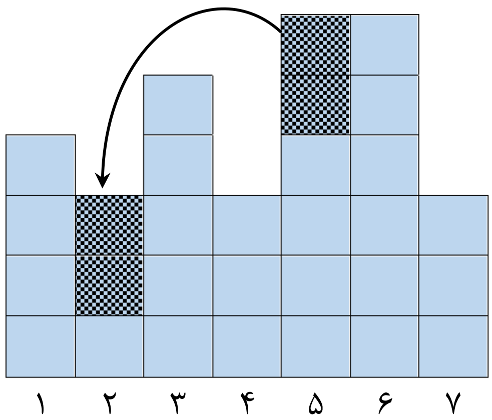
(۴)



(۶)



(۲)

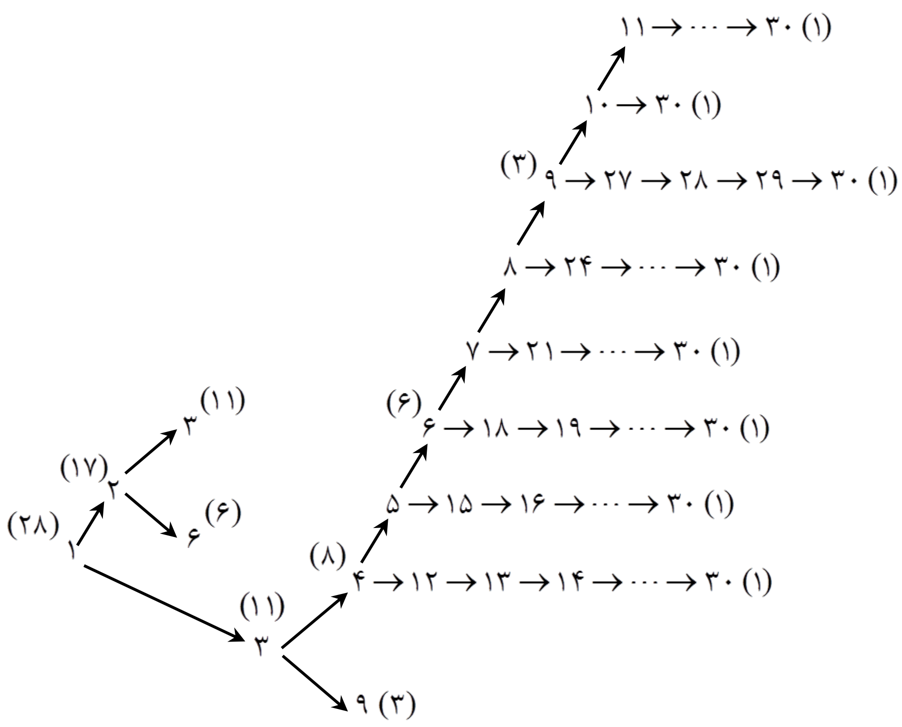


(۳)

۱۲. گزینهٔ ۲ صحیح است.

می‌دانیم در یک مکعب مستطیل ۳ نوع وجه مختلف داریم و وجه‌های یکسان مقابل یکدیگرند. برای نوشتن عدد ۱ سه وجه مختلف وجود دارد این عدد را روی هر وجهی بنویسیم در وجه مقابل آن عدد ۶ نوشته می‌شود. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید این دو وجه، وجه‌های بالایی و پایینی تاس باشند. برای انتخاب عدد ۲ دو وجه داریم و عدد ۵ در مقابل آن نوشته می‌شود. برای انتخاب جای ۳ و ۴ نیز ۲ حالت داریم بنابراین پاسخ مسئله برابر است با: $۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳$

۱۳. گزینهٔ ۳ صحیح است.



۱۴. گزینهٔ ۳ صحیح است.

اعداد داخل ۱۵ خانه خاکستری باید اکیداً صعودی باشند. پس $k \geq ۱۵$ است. برای $k = ۱۵$ عددگذاری زیر را انجام می‌دهیم.

۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

۱۵. گزینهٔ ۴ صحیح است.

اگر چند جمله ابتدایی دنباله را بنویسیم خواهیم دید که:

۶ ۲ ۳ ۸ ۴ ۲ ۲ ۱ ۶ ۲ ۳ ۸ ۴ ۲ ۲ ۱ ۶ ۲ ۳ ۸ ۴ ۲ ۴ ۶ ۸ ۸ ۱ ۶ ۳ ۶ ۶ ۱ ۸ ۲

از جمله ۱۹ام به بعد دنباله رنگی تکرار می‌شود پس از جمله ۱۹ به بعد $a_n = a_{n+۸}$ پس مقدار جمله ۱۰۲۴ام با مقدار جمله ۲۴ برابر است و هر دوی آن‌ها برابر ۳ هستند.

۱۶. گزینهٔ ۱ صحیح است.

اعداد این دنباله شامل اعدادی است که در مبنای ۳ آن ها تنها دارای ارقام ۰ و ۱ باشد.
اگر تمامی اعدادی که می‌توانند در دنباله حضور داشته باشند را از کوچک به بزرگ در دنباله قرار دهیم. عدد ۲۷ام کمینه مقدار خود را خواهد داشت.
چون تعداد اعداد k رقمی در مبنای ۳ که شرایط مسئله را دارند برابر ۲^k است. پس عدد ۲۷ام این دنباله برابر است با:

$$۱۱۰۱۱_۳ = ۳^۰ + ۳^۱ + ۳^۳ + ۳^۴ = ۱۱۲$$

۱۷. گزینهٔ ۱ صحیح است.

وقتی مجموع ارقام یک عدد را با آن عدد جایگزین می‌کنیم باقیمانده آن عدد بر ۹ تغییری نمی‌کند. چون برای هر عدد آنقدر این کار را انجام می‌دهیم. تا یک رقمی شود می‌توان گفت برای هر عدد باقیمانده آن را بر ۹ در نهایت روی تخته می‌نویسد و اگر عدد ما بر ۹ بخشپذیر باشد به‌جای ۰ روی تخته ۹ نوشته می‌شود.
بنابراین سؤال این است که چند عدد از ۱ تا ۱۲۰۰ باقیمانده ۳ بر ۹ دارند. این تعداد برابر است با:

$$\frac{۱۲۰۰-۳}{۹}+۱=۱۳۴$$

۱۸. گزینهٔ ۱ صحیح است.

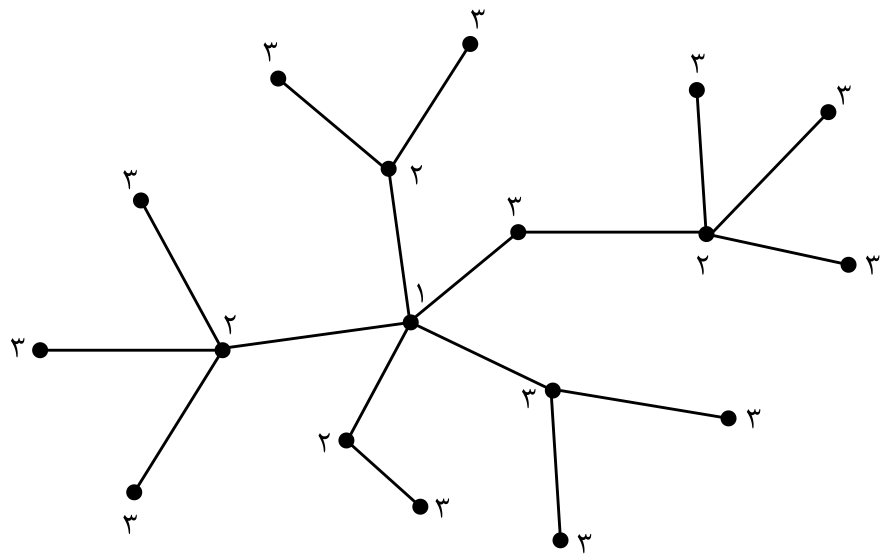
یک مسیر شامل n رأس را در نظر بگیرید. می‌دانیم کوچک‌ترین عددی که روی رئوس این مسیر است دقیقاً یک بار آماده است. (چون اگر کوچک‌ترین عدد روی دو رأس نوشته شده باشد در این صورت در مسیر بین این دو رأس همه اعداد روی رئوس از آن‌ها بزرگ‌تر خواهد بود)
بنابراین یکی از دو طرف این رأس بیشتر یا مساوی $\frac{n-۱}{۲}$ رأس دارد. بنابراین اگر کمینه مقدار k برای یک مسیر به طول n برابر $f(n)$ باشد در این صورت داریم:

$$f(n) \geq f\left(\left\lceil \frac{n-۱}{۲} \right\rceil\right) + ۱$$

می‌دانیم این درخت دارای مسیری با ۶ رأس است بنابراین:

$$f(۶) \geq f(۳) + ۱ \geq f(۱) + ۲ \geq ۳$$

و شماره‌گذاری را به‌صورت زیر انجام می‌دهیم.



۱۹. گزینهٔ ۲ صحیح است.

عدد را به‌صورت abcdefgh در نظر می‌گیریم. ارقام g,e,c,a را در دسته اول و بقیه را در دسته دوم قرار می‌دهیم. اعداد ۳ و ۷ در یک دسته‌اند و اعداد ۱ و ۵ و ۹ در دسته دیگر. تعداد اعدادی که ۳ و ۷ در یک دسته قرار دارند با تعداد اعدادی که آن‌ها در دسته دیگر قرار دارند برابر است. پس تعداد اعدادی که ۳ و ۷ در دسته اول قرار دارند را محاسبه کرده و دو برابر آن برابر پاسخ مسأله می‌باشد.

تعداد حالاتی که ۳ و ۷ در دسته اول هستند را با $a_{۲n}$ نمایش می‌دهیم (برای اعداد ۲n رقمی) اگر خانه g با عدد ۳ پر شود، خانه‌های f و e به یکی از سه صورت ۱ و ۳ و یا ۵ و ۷ و یا ۵ و ۳ پر خواهند شد و اگر در خانه g عدد ۷ باشد، خانه‌های f و e به یکی از سه صورت ۹ و ۷ یا ۵ و ۳ یا ۵ و ۷ پر خواهند شد. بنابراین $a_{۲n} = ۳a_{۲n-۲}$. در نتیجه:

$$a_n = ۳a_۶ = ۹a_۴ = ۲۷a_۲ = ۲۷ \times ۴ = ۱۰۸$$

بنابراین پاسخ مسأله برابر $۲ \times ۱۰۸ = ۲۱۶$ می‌باشد.

۲۰. گزینهٔ ۲ صحیح است.

از آن‌جا که می‌دانیم $(۱+a)(۱+b)=(۱+ab+a+b)$ است. بنابراین اگر به هر عدد یک واحد اضافه کرده و با هم جمع کنیم، مجموع همواره ثابت است. بنابراین عدد نهایی برابر است با:

$$(۱+۱)(۱+\frac{۱}{۲})(۱+\frac{۱}{۳})\cdots(۱+\frac{۱}{۱۰۰})-۱$$
$$=\frac{۲}{۱}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}\times\cdots\times\frac{۱۰۱}{۱۰۰}-۱=۱۰۰$$

۲۱. گزینهٔ ۴ صحیح است.

برای هر $n\geq ۲$، با انتخاب $a=n!$ به هدف مورد نظر می‌رسد.

۲۲. گزینهٔ ۴ صحیح است.

دو عدد واقع بر وجوه ۶ ضلعی را به $\binom{۸}{۲}$ طریق انتخاب کرده و روی این وجوه قرار می‌دهیم. ۶ عدد باقیمانده نیز به $۵!$ طریق روی بقیه وجوه قرار می‌گیرند. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$\binom{۸}{۲}\times ۵!=۳۳۶۰$$

۲۳. گزینهٔ ۱ صحیح است.

اگر عددی مضرب ارقام ۳۰ باشد باید مضرب ۲ ، ۳ ، ۵ باشد و همچنین می دانیم اگر k علامت جمع بین این اعداد قرار دهیم k + 1 عدد به یکی از فرم های ۱ ، ۱۱ ، ۱۱۱ ، ... با هم جمع می شوند.

هر طور این علامت ها را قرار دهیم در حاصل باقی مانده عبارت بر ۳ بخش‌پذیر می شود.

اگر k علامت بین این عبارت ها قرار دهیم حاصل عبارت برابر جمع k + 1 عدد فرد است. اگر بخواهیم حاصل عبارت عددی زوج باشد k باید تنها مقادیر فرد ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۹ ، ۱۱ ، ۱۳ را داشته باشد.

اگر k علامت بین این عبارت ها قرار دهیم حاصل عبارت برابر جمع k + 1 عدد است که همه آن ها باقی مانده ۱ بر ۵ دارند. بنابراین اگر بخواهیم که حاصل عبارت بر ۵ بخشپذیر باشد مقدار k تنها باید ۴ ، ۹ ، ۱۴را داشته باشد.

با توجه به شروط فوق مقدار k تنها باید برابر ۹ باشد. یعنی اگر ۹ علامت + را به هر ترتیبی که در این ۱۴ فاصله قرار دهیم ، حاصل عبارت بر ۳۰ بخشپذیر خواهد بود بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

$$\binom{14}{9}=2002$$

۲۴. گزینهٔ ۵ صحیح است.

مقداری که برای هر (i, j) به s اضافه می‌شود را برای هر ۶ رقم در مبنای دو به‌صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم. برای رقم kام در مبنای دو تنها (i, j)هایی که در رقم kام مبنای دو با هم تفاوت دارند مقدار ۲^k را به s اضافه می‌کنند. و تعداد (i, j)هایی که در رقم kام اختلاف دارند برابر است با ۲×۲^{۱۰} (چون رقمkام برای هر دو آن‌ها ۲ حالت و ۱۰ رقم برای هر دو عدد دیگر دو حالت). بنابراین پاسخ مسئله برابراست با:

$$\sum_{k=۰}^{۵} ۲^{۱۱}\times ۲^k = ۲۰۴۸\times\sum_{k=۰}^{۵} ۲^k = ۲۰۴۸\times(۲^۶-۱) = ۲۰۴۸\times ۶۳ = ۱۲۹۰۲۴$$

که باقیمانده آن بر ۵ برابر ۴ است.

۲۵. گزینهٔ ۲ صحیح است.

از رأس A می توان به دو طریق به یکی از دو یال مجاور رفت. از آن رأس به بعد برای هر زیر مجموعه‌ای از یال‌های مشخص شده در شکل که بخواهد از آن‌ها عبور کند و از بقیه عبور نکند دقیقاً یک مسیر به B یافت می‌شود. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با: ۳۲

۲۶. گزینهٔ ۱ صحیح است.

خانه‌های جدول اولیه را به ۳ دسته زیر تقسیم می‌کنیم!

A	B	A
B	C	B
A	B	A

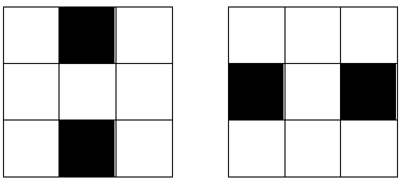
خانه‌هایی که در یک دسته قرار دارند در این دوران روی هم قرار می‌گیرند.

می‌دانیم خانه C باید سیاه باشد و برای خانه‌های B روی تعداد خانه‌های سیاه جدول اولیه حالت‌بندی می‌کنیم به این صورت که:

حالت ۱: اگر ۴ خانه سیاه باشند ۱ حالت

حالت ۲: اگر ۳ خانه سیاه باشند ۴ حالت

حالت ۳: اگر ۲ خانه سیاه باشند ۲ حالت زیر امکان دارد.



به‌طور مشابه برای دسته A نیز ۷=۱+۴+۲ حالت وجود دارد. و چون کل حالت های رنگ‌آمیزی برابر $۲^۹$ است پاسخ مسئله برابر است با:

$$\frac{۷\times ۷}{۲^۹}=\frac{۴۹}{۵۱۲}$$

۲۷. گزینهٔ ۴ صحیح است.

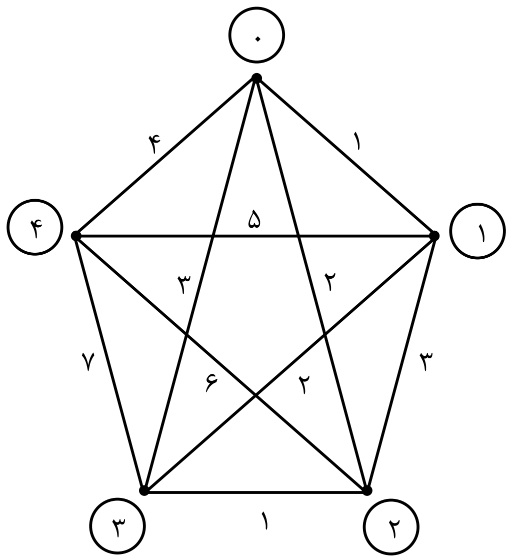
در دور اول همه اعداد فردا حذف می‌شوند: ۱، ۳، ۵، ۷، …

در دور دوم همه اعدادی که مضرب ۴ نیستند حذف می‌شوند: ۲، ۶، ۱۰، ۱۴، …

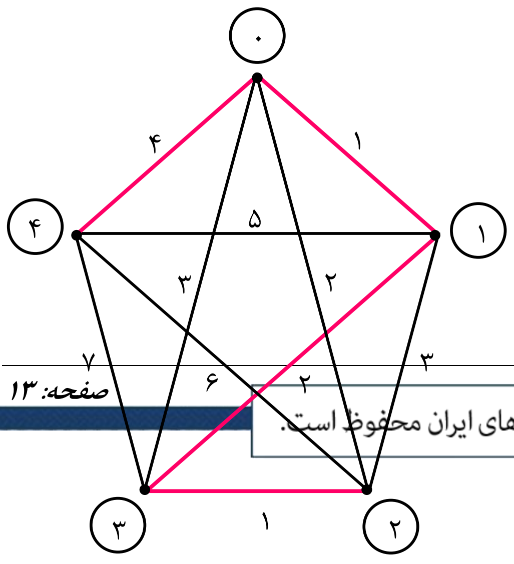
و به همین ترتیب اعدادی که مضارب ۸ و ۱۶ و ۳۲ نیستند به‌ترتیب حذف می‌شوند. بنابراین عدد باقیمانده ۶۴ خواهد بود.

۲۸. گزینهٔ ۲ صحیح است.

این گراف را مطابق شکل روبه‌رو می‌سازیم:



و مطابق شکل زیر مجموع وزن کمینه درخت فراگیر برابر است با:



$۱+۱+۲+۴=۸$

۲۹. گزینهٔ ۱ صحیح است.

مسئله را برای n تعمیم می‌دهیم:

یک گراف کامل ۲^n رأسی داریم و شماره رأس‌ها از ۰ تا $۲^n - ۱$ است و $f(n)$ برابر مجموع وزن یال‌های کمینه درخت فراگیر است.

وزن یال‌های گراف نیز اعداد ۰ تا $۲^n - ۱$ خواهند بود و هر کدام از این اعداد دقیقاً روی $۲^{n-۱}$ یال مجزا از گراف قرار دارد. اکنون طبق الگوریتم کروسکال تا حد امکان از یال‌های با کمترین وزن استفاده می‌کنیم.

بنابراین همه $۲^{n-۱}$ یال به وزن ۱ را اضافه می‌کنیم و سپس دو رأس متصل به هم را با هم ادغام می‌کنیم و یال بین رئوس را یال با کمترین وزن در نظر می‌گیریم. اکنون یک گراف $۲^{n-۱}$ رأسی با شرایط مسئله درست می‌شود با این تفاوت که وزن یال‌ها دو برابر حالت اولیه است. بنابراین داریم:

$$f(n) = ۲^{n-۱} + ۲ \times f(n-۱)$$

با توجه به $f(۰)=۰$ و رابطه فوق $f(۱۰)=۱۰\times۲^۹=۵۱۲۰$ است. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با ۵۱۲۰ که باقیمانده آن بر ۵ برابر صفر است.

۳۰. گزینهٔ ۲ صحیح است.

اگر ۳۶ مهره داشته باشیم می‌توان آن‌ها را در ۶ سطر و ستون اول قرار داد که در این صورت تنها ۵ سطر وجود دارد که بیشتر خانه‌های آن خالی است. بنابراین پاسخ مسئله حداکثر برابر ۳۵ است.

اکنون فرض کنید ۳۵ مهره را در جدول قرار داده‌ایم ولی کمتر از ۶ سطر وجود دارد که بیشتر خانه‌های آن خالی است. این یعنی بیشتر یا مساوی ۶ سطر وجود دارد که بیشتر خانه‌های آن پر است. بنابراین ۶ سطر وجود دارد که هر کدام حداقل ۶ مهره دارند. بنابراین حداقل ۳۶ مهره در این جدول گذاشته شده است و این با فرض ۳۵ تا بودن مهره‌ها تناقض دارد.

بنابراین پاسخ مسئله برابر ۳۵ است.

باشگاه طلایی های ایران

IRAN'S GOLD WINNERS CLUB

طراحان آزمون

عباس ثروتی

امین انوری

نیما رهبردوست

سیدحسین موسوی

احسان گوهرشادی

سجاد انگوتی

سرگروه: عباس ثروتی – امین انوری

باشگاه طلایی های ایران

موفق ترین گروه آموزش المپیاد در کشور