باسمه تعالی

باشگاه طلایی های ایران

علم همراه تهذیبِ نفس است که انسان را به مقام انسانیت می رساند .هم
در علم کوشا باشید وهم در عمل و هم در تهذیب اخلاق .

"امام خمینی(ره)"

باشگاه طلایی های ایران
IRAN'S GOLD WINNERS CLUB

دفترچهٔ پاسخنامه آزمون آزمایشی مرحله اول

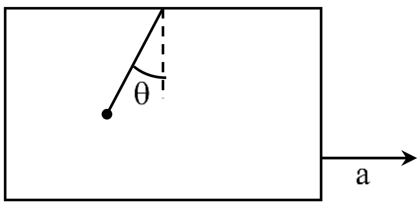
المپیاد فیزیک سال ۱۳۹۶

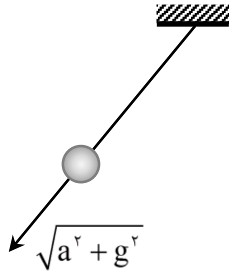
پاسخنامه تشریحی

---

۱. گزینهٔ ۳ صحیح است.

درست مانند این است که شتاب گرانش $\sqrt{a^۲+g^۲}$ شده است.





برای a به سمت چپ هم دقیقاً همین گونه است.

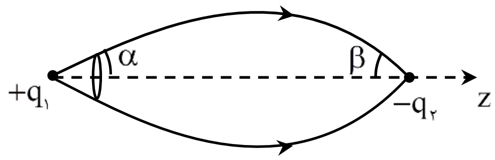
$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^۲+a^۲}}}$$

۲. گزینهٔ ۳ صحیح است.

اگر میله هیچ‌گونه تغییر طول یا تغییر مساحتی به‌دلیل انبساط نداشت، نمودار (a) درست بود؛ اما اگر این را در نظر بگیریم که به‌دلیل تغییر دمای نقاط مختلف میله، سطح مقطع آن تغییر می‌کند $(A = A_0(۱+۲\alpha\Delta T))$، و با توجه به رابطهٔ رسانش گرمایی $P = kA\frac{dT}{dx}$، اگر سطح مقطع قسمتی از میله افزایش یابد، $\frac{dT}{dx}$ کاهش می‌یابد بنابراین در مکان‌هایی که تغییر سطح مقطع بیشتر از بقیهٔ قسمت‌هاست (نزدیک منبع گرمایی دمای $T_۱$)، تغییر دما بسیار کندتر است. شیب در نزدیکی T_0 بیشتر از $T_۱$ است.

۳. گزینهٔ ۱ صحیح است.

می‌دانیم که خطوط میدان با زاویه ثابت α حول z می‌چرخد و سه‌بعدی است حال شار را برابر می‌گذاریم.
چون $\int z\,dz$ روی خط میدان صفر است.



$$\frac{q_۱(۱-\cos\alpha)}{\cancel{۲}}=\frac{q_۲(۱-\cos\beta)}{\cancel{۲}}$$

$$\frac{q_۱}{q_۲}\sin^۲(\frac{\alpha}{۲})=\sin^۲(\frac{\beta}{۲})\Rightarrow\beta=۲\sin^{-۱}(\sqrt{\frac{q_۱}{q_۲}}\sin(\frac{\alpha}{۲}))$$

۴. گزینهٔ ۳ صحیح است.

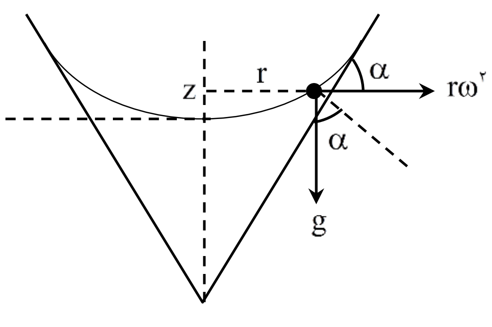
$$dU=dQ-PdV\Rightarrow P=-\alpha V+\beta\Rightarrow U=\frac{r}{۲}PV\Rightarrow U=\frac{r}{۲}(-\alpha V^۲+\beta V)$$

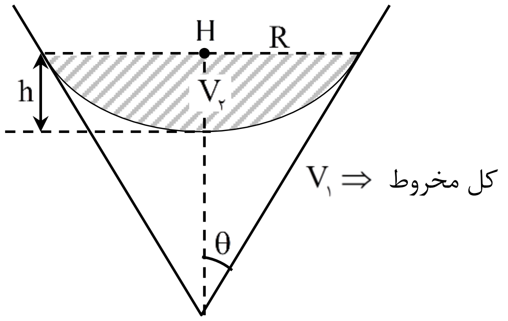
$$dU+PdV=dQ=\frac{r}{۲}(-۲\alpha V+\beta)dV+(-\alpha V+\beta)dV=(-(۱+r)\alpha V+\beta(۱+\frac{r}{۲}))dV$$

$(-(۱+r)\alpha V+\beta(۱+\frac{r}{۲}))$، دقیقاً در نقطه P صفر می‌شود و چون قبل از آن $dQ>۰$ و بعد از آن $dQ<۰$. پس گزینه (۳) صحیح است.

۵. گزینهٔ ۱ صحیح است.

معادلهٔ سطح آزاد: $\frac{dz}{dr}=\tan\alpha=\frac{r\omega^۲}{g}\Rightarrow z(r)=z_0+\frac{r^۲\omega^۲}{۲g}$





$$V_1 = \frac{1}{3} H \times \pi R^2 = \frac{1}{3} \pi H^3 \tan^2 \theta$$

$$V_2 = \frac{g}{\omega^2} h^2 \pi = \frac{R^4 \omega^2}{4g} \pi$$

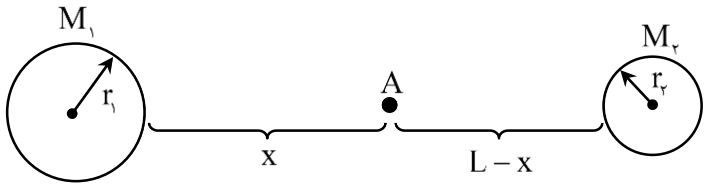
حجم مایع: $V_0 = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} \pi H^3 \tan^2 \theta - \frac{\omega^2}{4g} \pi H^4 \tan^4 \theta$

هدف: $\frac{\omega^2}{g} H \tan\theta = \cot\theta$ (مماس شدن سطح آزاد آب بر دیواره)

$$\Rightarrow H = \frac{g}{\omega^2} \cot\theta \Rightarrow V_0 = \frac{\pi}{12} \frac{g^3}{\omega^6} \cot^4 \theta$$

۶. گزینهٔ ۳ صحیح است.

نقطهٔ A را بین دو سیاره طوری در نظر می‌گیریم که فاصلهٔ آن از سیاره ۱ برابر x و در آن نقطه، برآیند نیروها صفر باشد. (جاذبه سیاره ۱، جاذبه سیاره ۲ را خنثی کند.)



$$\sum F_{(A)} = 0 \Rightarrow \frac{GM_1}{x^2} = \frac{GM_2}{(L-x)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{x}{L-x}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{L-x} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \Rightarrow x = \frac{L}{1+\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}}$$

بدیهی است که سرعت محموله در این نقطه، منفی (به سمت M_1) نمی‌تواند باشد. یا صفر است یا مثبت (به سمت M_2). اگر محموله را طوری پرت کنیم که در نقطهٔ A سرعت صفر داشته باشد (کمی بیشتر از صفر)، جاذبهٔ سیاره ۲ از آن‌جا به بعد، بر جاذبهٔ سیارهٔ ۱ غلبه می‌کند و کمترین انرژی برای این حالت است. در صورتی هم که محموله به A نرسد، هرگز به سیاره ۲ نخواهد رسید. (بدیهی است.)

پس معادلات پایستگی انرژی را طوری می‌نویسیم که پرتابه در نقطه A، سرعتی نداشته باشد.

$$E_0 = E_A \Rightarrow K_{min} - \frac{GM_۱ m}{r_۱} - \frac{GM_۲ m}{L - r_۱} = \frac{-GM_۱ m}{x} - \frac{GM_۲ m}{L - x}$$

(حواستان باشد که انرژی پتانسیل گرانشی منفی است.)

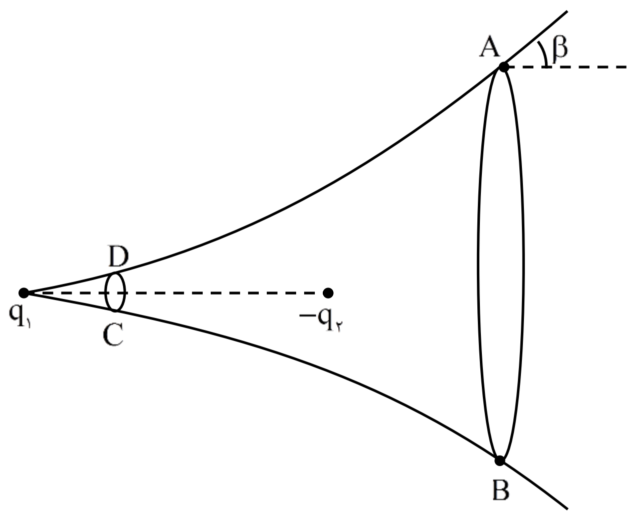
$$K_{min} = Gm\left(\frac{M_۱}{r_۱} + \frac{M_۲}{L - r_۱} - \frac{M_۱}{x} - \frac{M_۲}{L - x}\right) \xrightarrow{\text{با جاگذاری}} x = \frac{L}{۱ + \sqrt{\frac{M_۲}{M_۱}}}$$

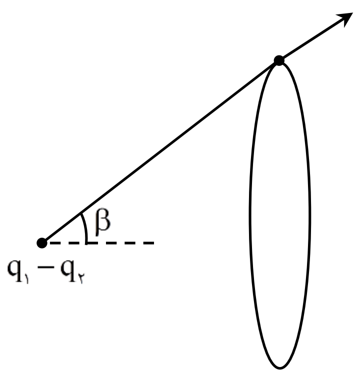
$$\Rightarrow K_{min} = Gm\left(\frac{M_۱}{r_۱} + \frac{M_۲}{L - r_۱} - \frac{M_۱\left(۱ + \sqrt{\frac{M_۲}{M_۱}}\right)}{L} - \frac{M_۲\left(۱ + \sqrt{\frac{M_۱}{M_۲}}\right)}{L}\right)$$

$$\Rightarrow K_{min} = Gm\left(\frac{M_۱}{r_۱} + \frac{M_۲}{L - r_۱} - \frac{M_۱ + M_۲ + ۲\sqrt{M_۱ M_۲}}{L}\right)$$

۷. گزینهٔ ۱ صحیح است.

در این‌جا شار خروجی از سطح $ABCD$ برابر $\frac{-q_۲}{\varepsilon_0}$ است. چون β در بسیار دور است.



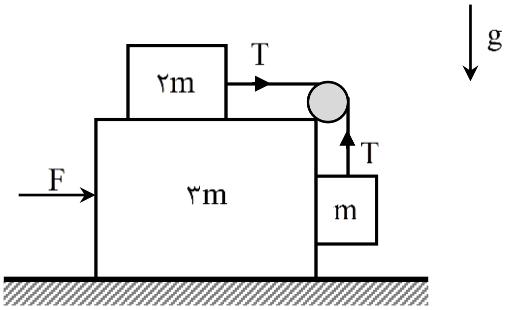


$$\frac{(q_۱ - q_۲)(۱ - \cos\beta)}{۲\cancel{\varepsilon_0}} - \frac{q_۱(۱ - \cos\beta)}{۲\cancel{\varepsilon_0}} = \frac{-q_۲}{\cancel{\varepsilon_0}}$$

$$۱ - \cos\beta = \frac{q_۱(۱ - \cos\alpha)}{q_۱ - q_۲} - \frac{۲q_۲}{q_۱ - q_۲} \Rightarrow \cos\beta = \frac{q_۲ + q_۱\cos\alpha}{q_۱ - q_۲}$$

۸. گزینهٔ ۲ صحیح است.

چون جسم m شتاب ندارد پس هر سه جسم با شتاب برابر حرکت می‌کنند.

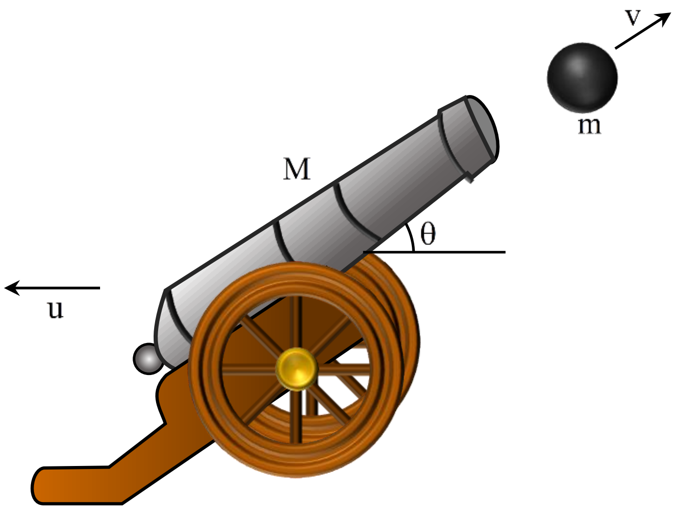


$$T = mg$$

$$۲ma = T = mg \Rightarrow a = \frac{g}{۲}$$

نیروی خارجی : $F = ۳ma + ma + ۲ma = ۶ma = ۶m \times \frac{g}{۲} = ۳mg$

۹. گزینهٔ ۳ صحیح است.



$$\vec{v}' = (v\cos\theta - u)\hat{x} + v\sin\theta\hat{y} \Rightarrow v'^{۲} = v^{۲} + u^{۲} - ۲vu\cos\theta$$

(انرژی) $E = \frac{۱}{۲}Mu^{۲} + \frac{۱}{۲}m(v^{۲} + u^{۲} - ۲vu\cos\theta)$

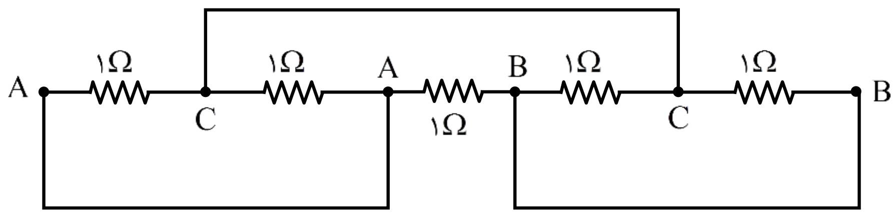
(تکانه) $Mu = m(v\cos\theta - u) \Rightarrow u = \frac{m}{m+M}v\cos\theta$

$$\Rightarrow E = \frac{۱}{۲}\frac{m^{۲}}{m+M}v^{۲}\cos^{۲}\theta + \frac{۱}{۲}mv^{۲} - \frac{m^{۲}}{m+M}v^{۲}\cos^{۲}\theta = \frac{۱}{۲}mv^{۲}(\frac{-m}{m+M}\cos^{۲}\theta + ۱)$$

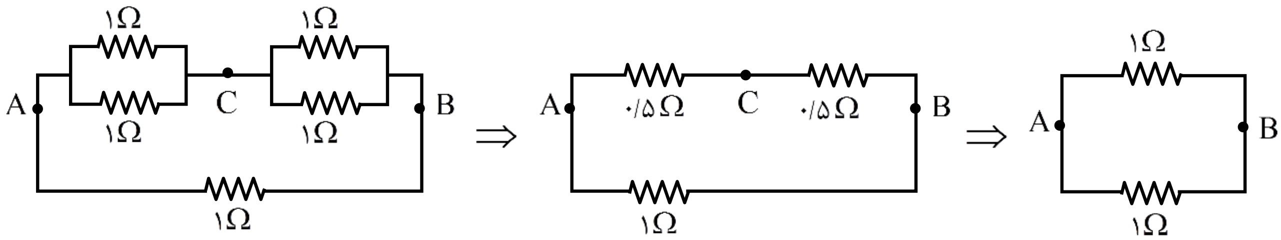
$$\Rightarrow v^{۲} = \frac{۲E}{m} \times \frac{m+M}{m\sin^{۲}\theta + M} \Rightarrow u^{۲} = \frac{۲E}{m+M} \times \frac{m\cos\theta}{m\sin^{۲}\theta + M}$$

۱۰. گزینهٔ ۲ صحیح است.

مدار را در نظر بگیرید.

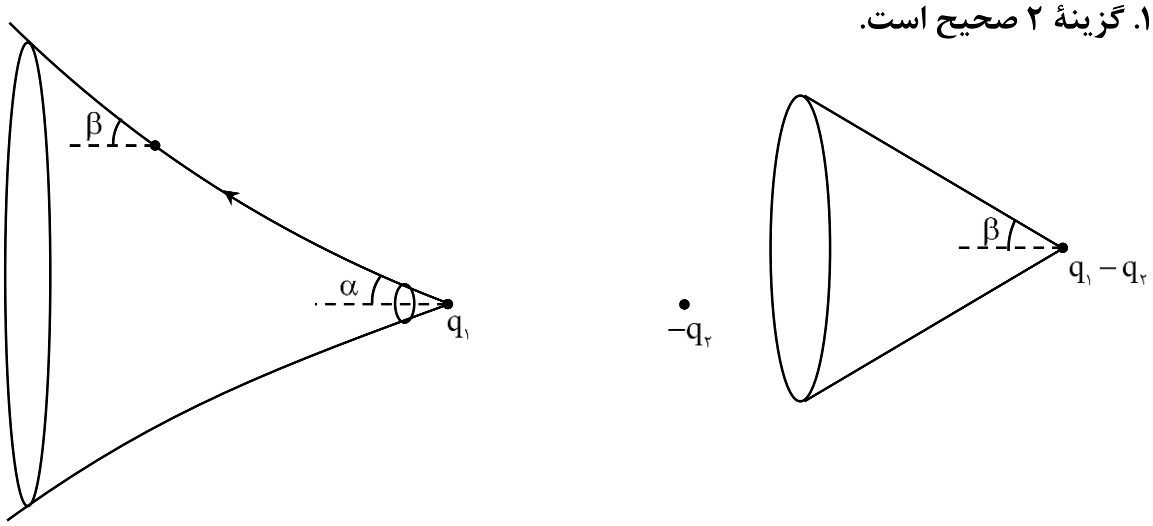


با توجه به این‌که مقاومت سیم‌های رابط، بسیار ناچیز است. می‌توان پتانسیل سایر نقاط را به‌صورتی که در شکل مشخص شده در نظر گرفت. پس مدار را دوباره و به شیوه‌ای دیگر می‌کشیم.



و در نهایت  ⇐ پس مقاومت معادل بین B و A برابر $0/5\Omega$ است.

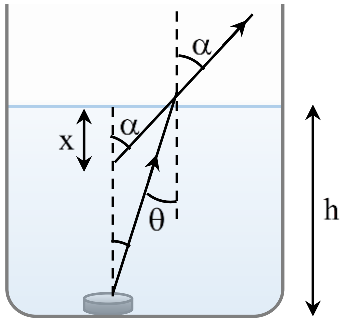
۱۱. گزینهٔ ۲ صحیح است.



$$\frac{q_1(1-\cos\alpha)}{\cancel{2}} = (q_1-q_2)\frac{(1-\cos\beta)}{\cancel{2}}$$

$$\frac{q_۱}{q_۱-q_۲}\cdot\cancel{۲}\sin^۲(\frac{\alpha}{۲})=\cancel{۲}\sin^۲(\frac{\beta}{۲})\Rightarrow\beta=۲\sin^{-۱}(\sqrt{\frac{q_۱}{q_۱-q_۲}}\sin(\frac{\alpha}{۲}))$$

۱۲. گزینهٔ ۲ صحیح است.



$$CdT=Hdt\Rightarrow T=\frac{Ht}{C}+T_0\Rightarrow\Delta T=\frac{Ht}{C}$$

$$\cancel{A}h=\cancel{A}h_0(۱+\alpha\Delta T)\Rightarrow h_t=h_0+\frac{h_0\alpha Ht}{C}$$

$$\theta,\alpha\ll ۱$$

$$\underbrace{h\theta=\alpha x\qquad n\theta=\alpha}_{x=\frac{h}{n}}$$

$$y=h-x=h(۱-\frac{۱}{n})\Rightarrow\dot{y}=\frac{h_0\alpha H}{C}(۱-\frac{۱}{n})$$

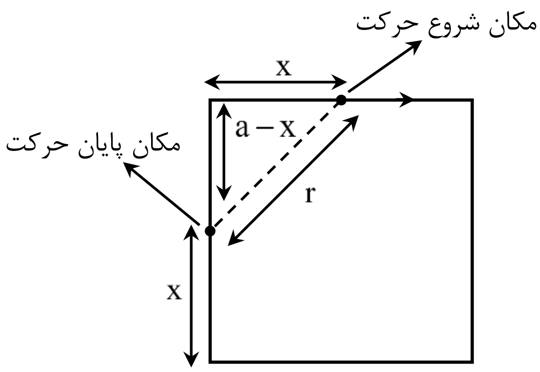
۱۳. گزینهٔ ۳ صحیح است.

با کمی تفکر، درمی‌یابیم که متحرک قادر به دنده عقب نیست زیرا سرعتش ثابت است. (برای دنده عقب باید سرعت کم شود، به صفر برسد و منفی بشود که با توجه به متن سؤال، امکان‌پذیر نیست.)

حال می‌خواهیم بدانیم که متحرک از کجا حرکتش را شروع کند؟

فرض کنید در فاصله x از یکی از رئوس شروع به حرکت ساعتگرد کند.

هم‌چنین می‌دانیم متحرک مسافت $۳a$ را می‌پیماید.



اندازه جابه‌جایی متحرک از مبدأ حرکت: $|r|$

باید ببینیم به‌ازای کدام مقدار x، r و $r^۲$ اکسترمم می‌شوند.

$$|r| = \sqrt{x^۲ + (a-x)^۲}$$

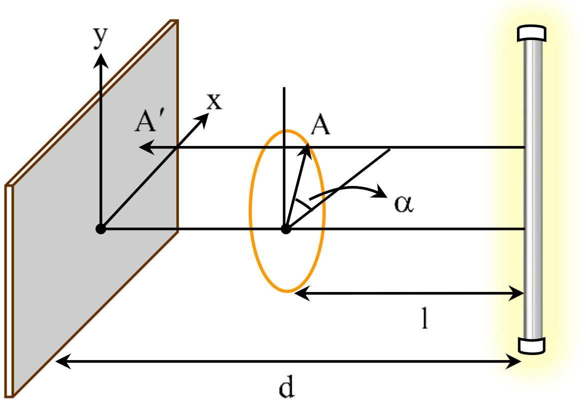
$$|r|^۲ = ۲x^۲ + a^۲ - ۲ax \Rightarrow x \le a \Rightarrow ۲x^۲ \le ۲ax \Rightarrow ۲ax - x^۲ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲ax \le ۰$$

$$\Rightarrow |r|^۲ \le a^۲ \Rightarrow |r|_{max} = a$$

برای یافتن r_{min} هم مشتق $r^۲$ نسبت به x را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{d|r|^۲}{dx} = ۴x - ۲a = ۰ \Rightarrow x = \frac{a}{۲} \Rightarrow r_{min} = \sqrt{۲}\frac{a}{۲} = \frac{a}{\sqrt{۲}}$$

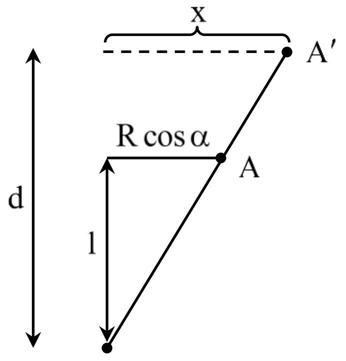
۱۴. گزینهٔ ۱ صحیح است.



$$y_{A'} = y_A = R\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{y}{R}$$

$$\frac{R\cos\alpha}{x} = \frac{l}{d} \Rightarrow x = \frac{dR}{l}\cos\alpha \Rightarrow \frac{xl}{dR} = \cos\alpha$$

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \frac{y^۲}{R^۲} + \frac{x^۲l^۲}{d^۲R^۲} = ۱$$



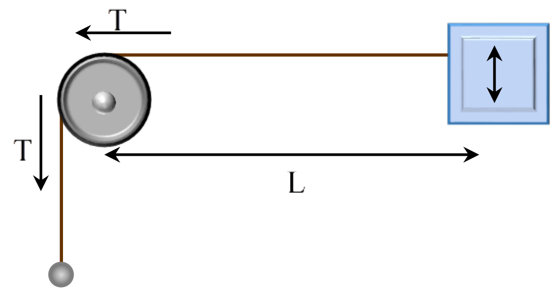
۱۵. گزینهٔ ۲ صحیح است.

می‌دانیم اگر $v_0 = ۰$ باشد آن‌گاه $R_{max} = ۰$ پس گزینه (۱) رد می‌شود.

هم‌چنین می‌دانیم در حالت $h = ۰$ مسئله همان ۴۵° می‌شود که $R_{max} = \frac{v_0^۲}{g}$ پس گزینه (۴) رد می‌شود.

و اگر $h \to \infty$ آن‌گاه $R \to \infty$ پس گزینه (۳) هم رد می‌شود.

۱۶. گزینهٔ ۱ صحیح است.



$T = mg$

سرعت موج $C = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$

به‌خاطر این‌که موتور در نقطه شکم است. $L = \frac{\lambda}{۴}$

رابطه سرعت موج $\lambda f = C$

$\Rightarrow f = \frac{۱}{۴L}\sqrt{\frac{mg}{\mu}}$

۱۷. گزینهٔ ۴ صحیح است.

جرم مکعب را از حالت تعادل پیدا می‌کنیم؛ در حالت تعادل داریم: (ضمناً بدیهی است که جواب مسئله کلاً مستقل از P_0 می‌باشد.)

نیروی کشش (روبه بالا) فنر : ka

نیروی شناوری (روبه بالا) : $\rho g(a)(۲a)(۲a)$

نیروی وزن (روبه پایین) : mg

$$\sum F = 0 \Rightarrow 4\rho g a^3 + ka = mg \Rightarrow m = \frac{4\rho g a^3 + ka}{g}$$

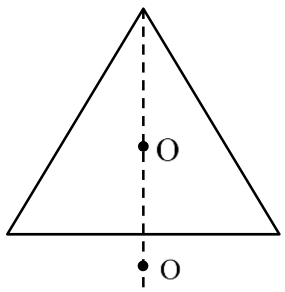
حال فرض می‌کنیم مکعب به اندازهٔ کوچک δ پایین‌تر کشیده شده است.

$$\boxed{\downarrow\delta} \qquad \delta \ll a$$

$$\sum F = m\ddot{\delta} \Rightarrow 4a^2\rho g(a+\delta) + k(a+\delta) - mg = -m\ddot{\delta}$$

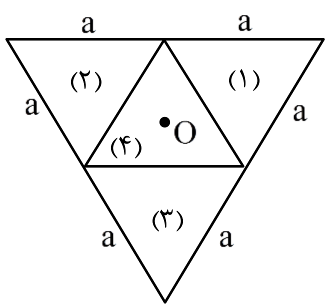
$$\xrightarrow{\text{باجاگذاری m}} \ddot{\delta} + \frac{4a^2\rho g + k}{4a^3\rho g + ka} g\delta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

۱۸. گزینهٔ ۳ صحیح است.



از تحلیل ابعادی بدست می‌آوریم که $\phi_O = C\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a$ ، C یک ثابت است و a ضلع مثلث

حال اگر مثلث روبه‌رو را داشته باشیم:



چون ضلع دو برابر شده پس $\phi'_O = 2\phi_O$

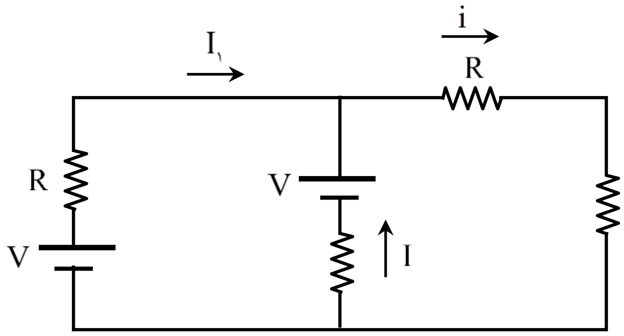
حال پتانسیل ناشی از (۱)، (۲) و (۳) در O مانند ϕ_A می‌باشد. پتانسیل ناشی از (۴) هم همان ϕ_O است.

$$3\phi_A + \phi_O = \phi'_O = 2\phi_O \Rightarrow 3\phi_A = \phi_O \Rightarrow 3 = \frac{\phi_O}{\phi_A}$$

۱۹. گزینهٔ ۱ صحیح است.

از تقارن مشخص است که $I_۱$ هم مساوی I است.

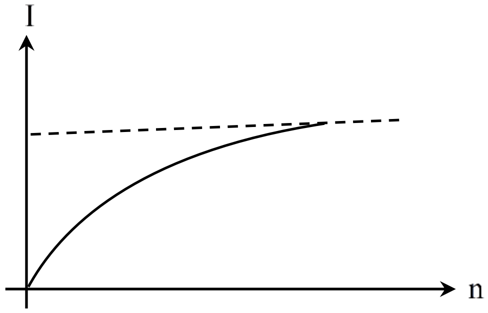
پس: $i = I_۱ + I = ۲I$



$$V - RI - Ri - Ri = ۰$$
$$\Rightarrow V - ۵RI = ۰ \Rightarrow I = \frac{V}{۵R}$$

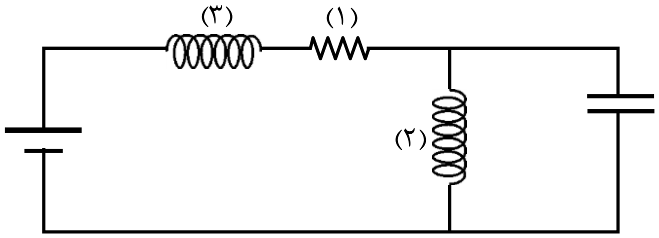
۲۰. گزینهٔ ۴ صحیح است.

چون پس از مدتی دیگر نمک حل نمی‌شود و محلول اشباع می‌گردد. پس یعنی تغییر n تغییری در جریان نمی‌دهد، پس گزینه صحیح ۴ است.



۲۱. گزینهٔ ۴ صحیح است.

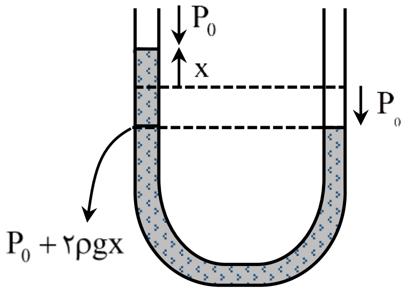
۲۲. گزینهٔ ۶ صحیح است.



ابتدا ببینیم در $t \to \infty$ چه اتفاقی می‌افتد. که به احتمال زیاد تمام ولتاژ روی مقاومت (۱) می‌افتد.
پس یعنی جریان ثابت از (۱) گذشته و بعد هم از القاگر (۲) می‌گذرد. یعنی $I = 0$ است و هم‌چنین چون پتانسیل دو سر القاگر (۲) صفر است بار خازن هم صفر است؛ پس یعنی مساحت زیر نمودار $I - t$ از ابتدا تا $t \to \infty$ صفر می‌شود.
پس تنها گزینه‌های (هـ) و (و) می‌مانند.
در $t = 0$ بار خازن و جریان $I = 0$ است؛ یعنی پتانسیل دو سر (۲) هم صفر است یعنی $L\dot{I}_2 = 0$ پس جریان (۲) زیاد نمی‌شود یعنی زیاد شدن جریان در (۳) موجب زیاد شدن I می‌شود پس در لحظه اول شیب صفر نیست.

۲۳. گزینهٔ ۱ صحیح است.

برای حالت اول:

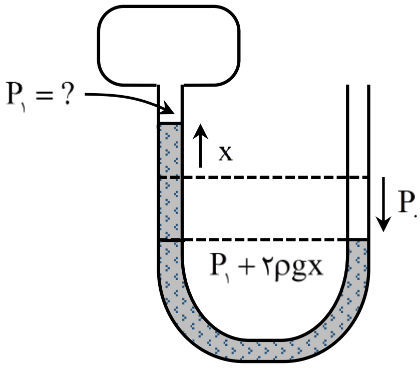


$$-(P_0 + 2\rho g x)A + P_0 A = (\underbrace{m}_{\text{جرم کل آب}} - 2P \underset{0}{\overset{\text{مرتبهٔ دو می‌شود}}{\cancel{x}}} A)\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + 2\rho g A x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{2\rho g A}{m}$$

$$\frac{۴\pi^{۲}}{T_{۱}^{۲}}=\frac{۲\rho gA}{m}$$

برای حالت دوم:



$$P_{۱}(V_0-Ax)^{\gamma}=P_0V_0^{\gamma}$$

چون x کوچک است پس:

$$P_{۱}=P_0(۱+\frac{\gamma Ax}{V_0})$$

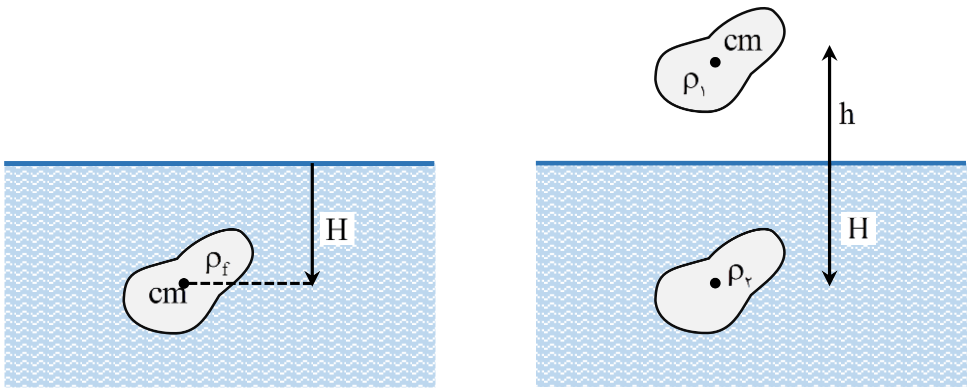
$$-(P_0+\frac{P_0\gamma Ax}{V_0}+۲\rho gx)A+P_0A=m\ddot{x}\Rightarrow\ddot{x}+(\frac{۲\rho gA}{m}+\frac{P_0\gamma A}{V_0m})x=۰$$

$$\frac{۴\pi^{۲}}{T_{۲}^{۲}}=\frac{۲\rho gA}{m}+\frac{P_0\gamma A^{۲}}{mV_0}=(۲\rho g+\frac{P_0\gamma A}{V_0})\frac{A}{m}\Rightarrow\frac{\cancel{۴\pi^{۲}}}{\underset{\overset{\downarrow}{\frac{۴\pi^{۲}}{T_{۱}^{۲}۲\rho g}}}{T_{۲}^{۲}}}=\frac{\cancel{۴\pi^{۲}}}{۲\rho gT_{۱}^{۲}}(۲\rho g+\frac{P_0A\gamma}{V_0})$$

$$\Rightarrow\gamma=\frac{۲\rho gV_0}{P_0A}((\frac{T_{۱}}{T_{۲}})^{۲}-۱)$$

۲۴. گزینهٔ ۱ صحیح است.

بقای انرژی را می‌نویسیم.



$$-\rho_{۱}VgH = \rho_{۱}Vgh + \rho_{۲}Vg(-H)$$

$$(\rho_{۲}-\rho_{۱})\cancel{V}\cancel{g}\,H = \rho_{۱}\cancel{V}\cancel{g}\,h \Rightarrow h = \left(\frac{\rho_{۲}}{\rho_{۱}}-۱\right)H$$

یعنی گزینه ۱ صحیح است. هم‌چنین می‌توان از این حالت خاص استفاده کرد که اگر $\rho_{۲}=\rho_{۱}$ باشد در آن صورت باید صفر شود.

۲۵. گزینهٔ ۳ صحیح است.

۲۶. گزینهٔ ۱ صحیح است.

۲۷. گزینهٔ ۲ صحیح است.

$$\text{اختلاف شدت} = ۱۰\log\frac{I_A}{I_B}$$

$$I \propto \frac{۱}{r^{۲}}$$

$$I_A = \frac{۳\overset{\overset{\text{یک ثابت}}{\uparrow}}{C}}{a^{۲}}$$

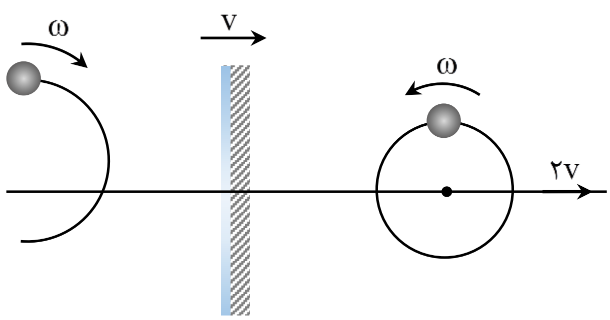
$$I_B = \frac{۲C}{a^۲} + \frac{C}{(۲a)^۲} = \frac{۹C}{۴a^۲}$$

اختلاف شدت $= ۱۰(\log \frac{\frac{۳C}{a^۲}}{\frac{۹C}{۴a^۲}}) = ۱۰\log\frac{۴}{۳} = ۱۰(\log ۴ - \log ۳) = ۱۰\underbrace{(۲\log ۲ - \log ۳)}_{۰/۶-۰/۴۸} = ۱۰ \times ۰/۱۲$

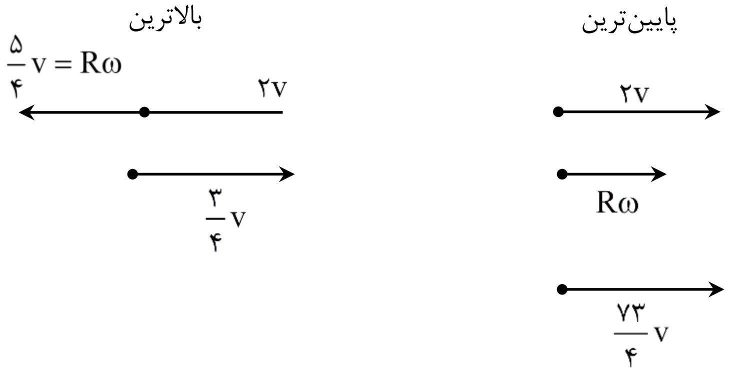
اختلاف شدت $= ۱/۲\,dB$

۲۸. گزینهٔ ۲ صحیح است.

مرکز دایره تصویر با سرعت $۲v$ حرکت می‌کند و جهت سرعت زاویه‌ای تصویر برعکس خود جسم است.



برای این‌که ببینیم خم ناشی از آن چه شکلی می‌شود کافیست سرعت جسم را در بالاترین و پایین‌ترین نقطه حرکت بیابیم.



گزینه ۳ رد می‌شود، چون در پایین‌ترین نقطه سرعت v_x ندارد.

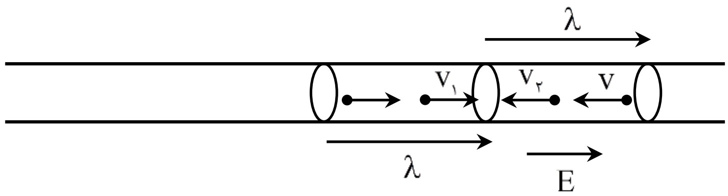
گزینه ۴ رد می‌شود، چون در بالاترین نقطه سرعت v_x منفی دارد.

گزینه ۱ رد می‌شود، چون v_xاش در پایین کمتر از بالا است.

گزینه ۲ گزینه صحیح است.

مسئله‌های کوتاه

۱.



$$v_0=\sqrt{\frac{kT}{m_c}}$$

$$v_0^2\geq\frac{2\lambda qE}{m}$$

$$v_0^2+2\lambda\frac{qE}{m}=v_1^2\Rightarrow v_1=v_0(1+\frac{\lambda qE}{mv_0^2})$$

$$v_0^2-2\lambda\frac{qE}{m}=v_2^2\Rightarrow v_2=v_0(1-\frac{\lambda qE}{mv_0^2})$$

چون نصف ذرات این المان به سمت راست می‌روند:

$$\frac{qnv_1\cancel{A}}{2}-\frac{qnv_2\cancel{A}}{2}=J\cancel{A}$$

$$\frac{nq}{2}(v_1-v_2)=J=\frac{nq}{2}(v_0(1+\frac{\lambda qE}{mv_0^2})-v_0(1-\frac{\lambda qE}{mv_0^2}))$$

$$J=\frac{nq}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}\lambda qE}{mv_0}=\frac{nq^2\cancel{E}}{mv_0}\lambda=\sigma\cancel{E}$$

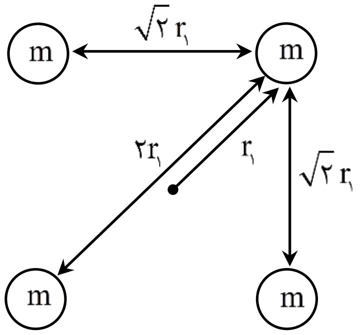
$$\sigma=\frac{nq^2\lambda}{mv_0}$$

$$\sigma=\frac{nq^2\lambda}{m}\sqrt{\frac{m}{kT}}$$

$$\sigma=77\times10^6\,(\frac{1}{\Omega m})$$

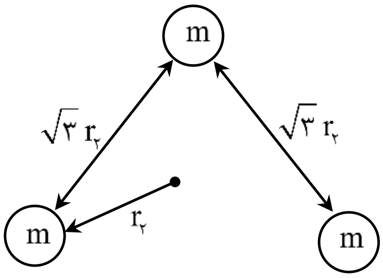
۲. فرض می‌کنیم سیارات در حالت ۱ با سرعت زاویه‌ای $\omega_۱$ و در حالت ۲ با سرعت زاویه‌ای $\omega_۲$ می‌چرخند. معادلات تعادل یکی از سیاره‌ها را در هر دو حالت می‌نویسیم.

در حالت ۱:



$$\frac{Gm^۲}{r_۱^۲}\left(\frac{۱}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=mr_۱\omega_۱^۲ \qquad (\mathrm{I})$$

در حالت ۲:



$$\frac{Gm^۲}{r_۲^۲}\left(۲\times\frac{۱}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=mr_۲\omega_۲^۲ \qquad (\mathrm{II})$$

معادلات I و II، از تعادل در راستای شعاعی بدست آمده‌اند.
اما به یک معادله دیگر نیز نیاز داریم. و مطمئن باشید که تکانه زاویه‌ای پایسته نیست. برای درک این امر، به نیروها بلافاصله پس از جدا شدن دقت کنید. اما پایستگی انرژی برای هر یک از سیارات برقرار است. حواستان باشد که انرژی پتانسیل گرانشی، منفی و کمیتی اسکالر (و غیرقابل برآیندگیری) است.

انرژی حالت ۱ = انرژی حالت ۲ $\Rightarrow E_۱=E_۲\Rightarrow \frac{-Gm^۲}{r_۱}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{\sqrt{۲}}\right)+\frac{۱}{۲}mr_۱^۲\omega_۱^۲=E_۱$

$$E_۲=\frac{-Gm^۲}{r_۲}\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)+\frac{۱}{۲}mr_۲^۲\omega_۲^۲=\frac{-Gm^۲}{r_۱}\left(\frac{۱+۲\sqrt{۲}}{۲}\right)+\frac{۱}{۲}mr_۱^۲\omega_۱^۲=E_۱ \qquad (\mathrm{III})$$

از حل کردن معادلات I، II و III به‌دست می‌آید که:

$$\frac{r_۲}{r_۱}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳\left(۱+۲\sqrt{۲}\right)}\simeq ۰/۳۳۵۷$$

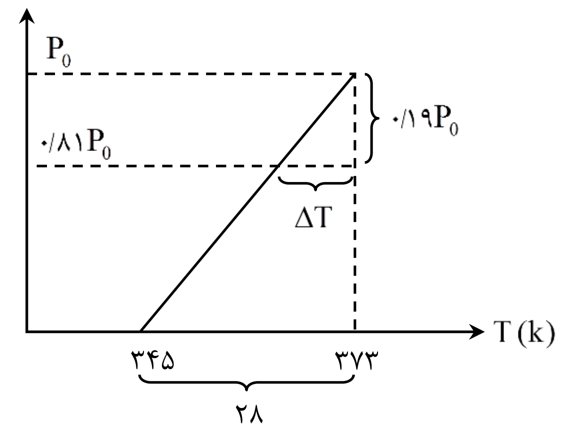
$$\frac{r_۲}{r_۱}=۰/۳۳۶\Rightarrow ۵۰\,\frac{r_۲}{r_۱}\simeq ۱۷$$

۳. قبل از حل شدن $۱۰۰۰\frac{g}{lit}$ بوده و $۷۵۵g$ اضافه شده که در اثر نمک است.

$$\text{مول نمک} = ۷۵۵g \times \frac{۱}{۵۸/۵\frac{g}{mol}} = ۱۲/۹\,mol$$

$$\text{مول آب} = ۱۰۰۰g \times \frac{۱}{۱۸\frac{g}{mol}} = ۵۵/۵۶\,mol$$

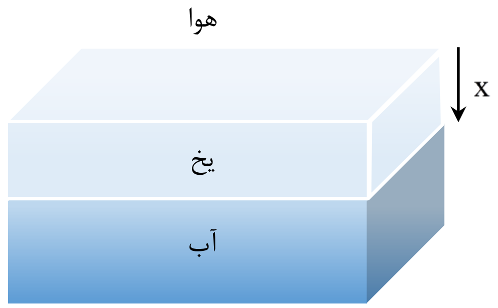
$$x = \frac{۱۲/۹}{۱۲/۹ + ۵۵/۵۶} = ۰/۱۹$$



تقریباً نمودار را در آن‌جا خط می‌گیریم. $\Leftarrow P' = ۰/۸۱P_0$

$$\frac{۰/۱۹P_0}{P_0} = \frac{\Delta T}{۲۸} \Rightarrow \Delta T \simeq ۵K$$

۴. از آن‌جایی که ضریب همرفتی هوا و یخ بسیار زیاد است پس سطح بالایی یخ همواره در دمای $-۱۰^\circ C$ باقی می‌ماند و چون در پایین هم آب در حال انجماد است. دمای پایین یخ هم همواره صفر می‌ماند. پس ΔT دو سر یخ همواره $۱۰^\circ C$ است.



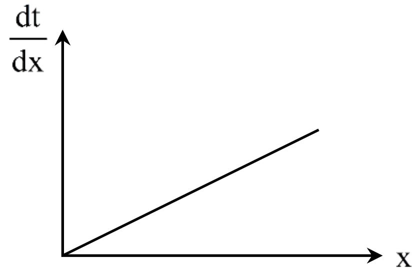
آب پایین در مدت dt به مقدار:

$$kA\frac{\Delta T}{x}dt$$

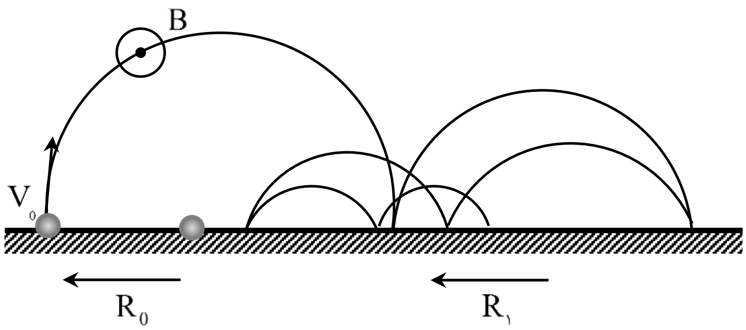
انرژی از دست می‌دهد و به یخ تبدیل می‌شود. یعنی:

$$k\cancel{A}\frac{\Delta T}{x}dt=\lambda dx\cancel{A}P \Rightarrow \frac{k\Delta T}{\lambda P}\frac{dt}{dx}=x \Rightarrow \frac{x\lambda P}{k\Delta T}=\frac{dt}{dx} \Rightarrow t(x)=\frac{\lambda P x^{۲}}{۲k\Delta T}$$

$$x=\sqrt{\frac{۲k\Delta T}{\lambda P}t}=۱۲cm$$



۵. جسم حرکت دایره‌ای انجام می‌دهد.



$$qv_0B=mR\omega^{۲} \Rightarrow q\cancel{v_0}B=m\cancel{v_0}\omega$$

$$\omega=\frac{qB}{m} \Rightarrow R_0=\frac{mv_0}{qB}$$

$$۰/۱۲۵\times۱۰^{-۳}=\frac{۱}{۸}\times۱۰^{-۳}s=\frac{\cancel{\pi}\times\overset{۱}{\cancel{۲}}\times۱۰^{-۲۷}}{\underset{۸}{\cancel{۱۶}}\times۱۰^{-۱۹}\times\frac{\cancel{\pi}}{۱۰}\times۱۰^{-۴}}=\frac{\pi m}{qB}=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{\frac{qB}{m}}$$

پس بعد از دو بار رفتن روی یک نیم دایره جهت B عوض می‌شود که موجب می‌شود نیم دایره‌ها به‌جای جلو رفتن عقب برگردند.

$$R_1 = \frac{mv_0\varepsilon}{qB}$$

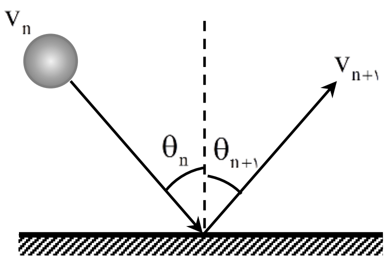
$$2R_0 + 2R_1 = \frac{2mv_0}{qB}(1+\varepsilon)$$

فاصله نهایی : $L_f = 2R_0 + 2R_1 - 2R_2 - 2R_3 + 2R_4 + \cdots$

$$= \frac{2mv_0}{qB}(1+\varepsilon)(1-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3+\cdots) = \frac{2mv_0}{qB} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 10^{-24}\times\cancel{2}\cancel{\pi}\times 10^{3}}{\underset{2}{\cancel{16}}\times 10^{-19}\times\frac{\cancel{\pi}}{10}\times 10^{-4}} = L_f = 50\,\text{cm}$$

۶.

برای یک برخورد دلخواه



سرعت عمودی ثابت : $v_n\cos\theta_n = v_{n+1}\cos\theta_{n+1} \Rightarrow v_{n+1} = v_n\dfrac{\cos\theta_n}{\cos\theta_{n+1}}$

$$\Rightarrow \int N\,dt = m(v_{n+1}\cos\theta_{n+1} + v_n\cos\theta_n) = 2mv_n\cos\theta_n$$

$$\Rightarrow \int f\,dt = \mu\int N\,dt = 2\mu m v_n\cos\theta_n$$

تغییر سرعت افقی: $m(v_n\sin\theta_n - v_{n+1}\sin\theta_{n+1}) = \int f\,dt = 2\mu m v_n\cos\theta_n$

$$\Rightarrow \sin\theta_n - \cos\theta_n\tan\theta_{n+1} = 2\mu\cos\theta_n \Rightarrow \tan\theta_{n+1} = \tan\theta_n - 2\mu$$

نکته: اگر در یک برخورد، $\mu > \frac{1}{2}\tan\theta_n$ باشد، اصطکاک تنها سرعت افقی را صفر می‌کند و هرگز آن را منفی نمی‌کند. در واقع این شرط همان شرط آخرین برخورد است.

در جهش‌های متوالی، حرکت توپ در هوا مهم نیست؛ زیرا توپ با هر سرعت و زاویه‌ای که پرتاب شود، با همان سرعت و زاویه برخورد می‌کند.

$\Rightarrow \tan\theta_n = \tan\theta_0 - ۲n\mu \Rightarrow$ تعداد برخوردها $N = \left\lfloor \dfrac{\tan\theta_0}{۲\mu} \right\rfloor = ۵$

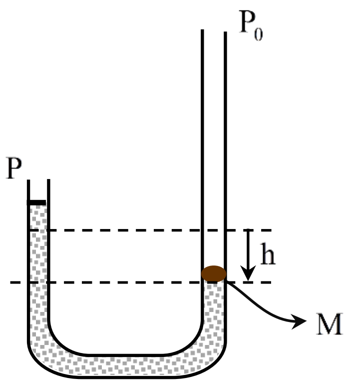
حرکت افقی بعد هر پرتاب: $R_n = \dfrac{۲v_n^۲}{g}\sin\theta_n\cos\theta_n = \dfrac{۲}{g}\underbrace{v_n^۲\cos^۲\theta_n}_{\text{سرعت افقی توپ ثابت است}}\tan\theta_n = \dfrac{۲}{g}v_0^۲\cos^۲\theta_0\tan\theta_n$

$\Rightarrow R_n = \dfrac{۲}{g}v_0^۲\cos^۲\theta_0(\tan\theta_0 - ۲n\mu) = ۲/۵(۱ - ۰/۲n)$

$\Rightarrow R_0 = ۲/۵m\ ,\ R_۱ = ۲m\ ,\ R_۲ = ۱/۵m\ ,\ R_۳ = ۱m\ ,\ R_۴ = ۰/۵m\ ,\ R_۵ = R_۶ = \cdots = ۰$

$\Rightarrow R = ۲/۵ + ۲ + ۱/۵ + ۱ + ۰/۵ = ۷/۵m = ۷۵dm$

.۷



برابری فشار مایع : $P + ۲\rho gh = P_0 + \dfrac{mg}{A} \Rightarrow P = P_0 + \dfrac{mg}{A} - ۲\rho gh$

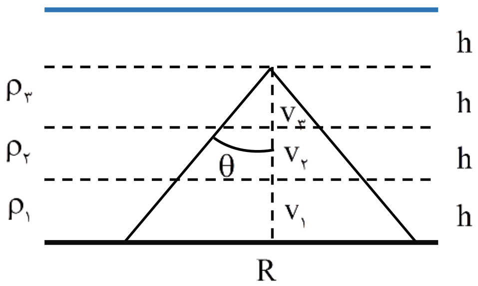
قانون گازها : $P(V_0 - hA) = P_0V_0$

$\Rightarrow ۲\rho gAh^۲ - (۲\rho gV_0 + mg + P_0A)h + \dfrac{mgV_0}{A} = ۰ \Rightarrow ۲h^۲ - ۴۰h + ۱۰۰ = ۰$

$\Rightarrow h = ۱۰ \pm \sqrt{۵۰} = ۱۰ \pm ۵\sqrt{۲} \Rightarrow h_۱ = ۱۰ + ۵\sqrt{۲} \Rightarrow P = -۱۰^۵\sqrt{۲}$ ×

$\Rightarrow h = ۱۰ - ۵\sqrt{۲} = ۵(۲ - \sqrt{۲}) \simeq ۲/۹۳m \Rightarrow |h - ۳| = ۰/۰۷m = ۷cm$

۸. می‌توان فشار را برحسب ارتفاع به‌دست آورد و از نیرو انتگرال گرفت اما یک راه ساده‌تر برای این کار نیز وجود دارد. به این صورت که به‌جای مخروط، مایعی از چگالی‌های گفته شده را قرار می‌دهیم؛ اگر مایع از چگالی مایع‌های کناری باشد، در تعادل خواهد بود؛ نیروی فشار مایع که از مایع‌های اطراف نیز به آن وارد می‌شوند برابر است.



$$P_{\text{کف}} = P_0 + \rho_۱ gh + \rho_۲ gh + ۲\rho_۳ gh$$

$$m_{\text{مایع}} = (\rho_۱ V_۱ + \rho_۲ V_۲ + \rho_۳ V_۳)g$$

$$V_۳ = \frac{۱}{۳}\pi h^۳ \tan^۲\theta$$

$$V_۲ + V_۳ = \frac{۱}{۳}\pi \times ۸h^۳ \tan^۲\theta \qquad \Rightarrow m_{\text{مایع}} = \frac{\pi}{۲۷}R^۲ h(\rho_۳ + ۷\rho_۲ + ۱۹\rho_۱)$$

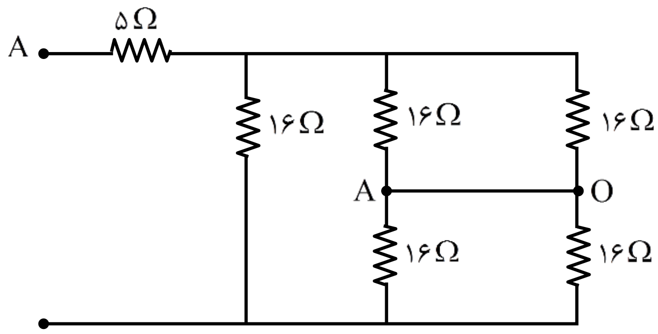
$$V_۱ + V_۲ + V_۳ = \frac{۱}{۳}\pi \times ۲۷h^۳ \tan^۲\theta$$

$$F_{\text{فشار}} + mg = F_{\text{کف}}$$

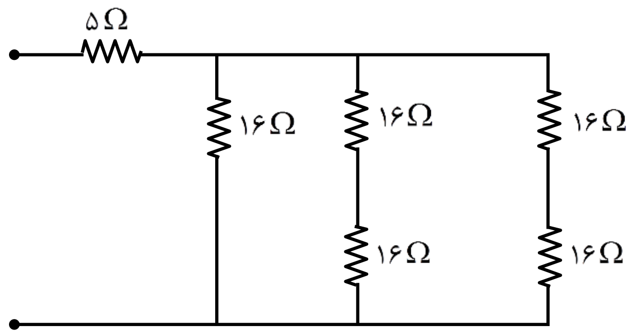
$$\Rightarrow F_{\text{فشار}} = \pi R^۲ hg(\frac{۵۳}{۲۷}\rho_۳ + \frac{۲۰}{۲۷}\rho_۲ + \frac{۸}{۲۷}\rho_۱) = ۴۳\,MN$$

۹. پاسخ: ۱۳Ω اهم

ابتدا مدار را به شکل روبه‌رو درمی‌آوریم. از تقارن می‌توان فهمید که $V_O = V_A$ پس می‌توان سیم بینشان را حذف کرد.



که مقاومت معادل این مدار می‌شود.



$$R_{eq} = ۱۳\Omega$$

باشگاه طلایی های ایران

IRAN'S GOLD WINNERS CLUB

طراحان آزمون

امیر پارسا زیوری

امین روانبخش

محمدحسین دارستانی

علی نعمتی

نیما محمدزاده

سرگروه: امیر پارسا زیوری

باشگاه طلایی های ایران

موفق ترین گروه آموزش المپیاد در کشور